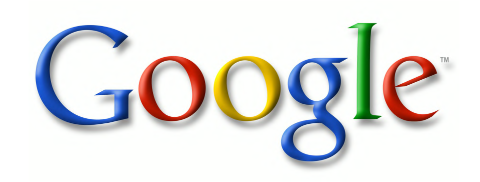


68

LES MATHÉMATIQUES

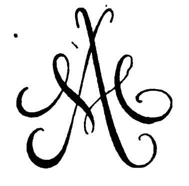
DU MÊME AUTEUR

Les Principes de l'Analyse mathématique, exposé historique et critique, 2 volumes. (Librairie Hermann.)

L'Idéal scientifique des Mathématiciens. (Librairie Alcan.)

PIERRE BOUTROUX
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

LES MATHÉMATIQUES



LBIN MICHEL, EDITEUR
RIS, 22, RUE HUYGHENS, 22, PARIS

AVANT-PROPOS

En répondant au désir du directeur de cette collection, qui a bien voulu me demander quelques pages sur les mathématiques, je sens que j'assume, sans en avoir l'air, une responsabilité assez périlleuse.

Ce petit livre s'adresse à tout le monde. Or, depuis que l'on a renoncé à leur confier le sceptre de l'univers, comme le demandait Platon, les mathématiciens n'ont guère eu à se louer de l'attitude prise à leur égard par ce qu'on est convenu d'appeler « le monde ». En soulevant un coin du voile qui enveloppe nos géomètres, ajouterons-nous quelque chose à leur réputation, ou n'allons-nous pas plutôt raviver imprudemment de vieux préjugés qui sommeillaient?

Que la plupart des hommes restent éloignés de la science spéculative, on ne saurait ni s'en étonner, ni s'en affliger. Mais le monde ne se contente pas d'ignorer les mathématiques. Il les juge. Et si, le plus souvent, il leur moigne du respect, ou même les admire, il n'a cependant pour elles aucune bienveillance. Lorsqu'un homme 'esprit prononce la phrase consacrée « je n'ai pas la osse des mathématiques », soyons sûrs qu'il n'y a dans

son ton et dans son sourire aucune nuance de regret, mais plutôt une satisfaction intime. N'est-il pas constant que, chez celui qui la possède, la fameuse bosse tire à elle toute la substance cérébrale, vide l'esprit, dessèche le cœur, paralyse la vie? Les purs mathématiciens, j'entends ceux qui cultivent la théorie pour elle-même sont, croit-on, des êtres anormaux, nourris d'illusion, des étrangers en tous pays. Ils excitent, il est vrai, quelque curiosité. A quoi donc, en effet, demande-t-on autour d'eux, à quoi rêvent ces jeunes et ces vieux savants? Quel objet poursuivent-ils? Quelles pensées cachent-ils sous leur étrange grimoire? Le public moderne, habitué à être informé de tout, s'étonne en constatant que le secret des mathématiciens est si bien gardé. Et il réclame des articles, des conférences, des livres, qui lui expliquent ce mystère. Eh bien, soit : puisque tel est leur désir, nous donnerons des livres aux gens du monde; mais j'ai bien peur qu'ils n'en tirent rien sinon la confirmation de l'opinion que d'avance ils avaient formée. S'ils ne comprennent pas notre exposé, cela prouvera que les problèmes des mathématiciens sont décidément insondables; s'ils comprennent, ils n'hésiteront plus à se faire eux-mêmes juges de ces problèmes, et en toute connaissance de cause, à ce qu'ils croiront, ils en dénonceront l'inanité.

Mettre les mathématiques à la portée des gens du monde, mais voilà quatre cents ans qu'on s'y essaye, et aucune entreprise n'a jamais été plus décevante. J'ai eu la curiosité de parcourir quelques-uns de ces écrits — publiés en si grand nombre depuis le XVIe *siècle — où l'on s'efforce de prouver l'utilité des mathématiques et d'exposer les raisons qui les rendent désirables. Quelle*

décourageante lecture! Combien tout cela est artificiel et misérable! Les auteurs de ces apologies ne savent-ils donc pas eux-mêmes pourquoi il faut aimer la science de leur choix, ou bien la défigurent-ils volontairement parce qu'ils veulent flatter le goût d'un public dont dépend leur fortune et leur position?

Ecoutons les maîtres mathématiciens du XVI*e* *siècle, c'est-à-dire du temps où, pour grossir leurs traitements, les professeurs étaient obligés de se faire eux-mêmes solliciteurs. Dans une série de discours et de pétitions, nous les voyons s'évertuer à démontrer que leur enseignement n'est point indigne des subventions royales. Sans doute, conviennent-ils, cet enseignement ne saurait disputer la prééminence à celui des langues anciennes et de la philosophie; mais n'oublions pas que les philosophes de l'antiquité nous ont eux-mêmes donné l'exemple de la spéculation mathématique; ils ont montré qu'elle peut fournir des principes et des modèles de raisonnement aux médecins, aux physiciens ou aux politiques. Non il n'est pas vrai, affirme Ramus, que le professeur de mathématiques soit un simple paresseux. A condition d'expurger sa science et d'associer la pratique à la théorie, il pourra devenir un homme utile. C'est ainsi que Monantheuil, collègue de Ramus au Collège Royal, s'efforce d'appliquer la mécanique à une foule de questions d'actualité : typographie, médecine, art militaire et art nautique, construction du Pont-Neuf, art d'atteler les bœufs et de placer les fardeaux sur les épaules des portefaix parisiens, détermination de la beauté des femmes d'après leurs proportions, etc., etc. Tels sont quelques-uns des fruits que les mathématiciens sauront tirer de leurs spéculations si*

Henri IV leur donne les moyens de vivre et s'il écarte de la France les trois ennemis les plus redoutables de l'Université, Πόλεμον, λιμόν, λοιμόν, *la guerre, la famine et la peste.*

Un demi-siècle passe, et voici le Père Mersenne qui, à son tour, entreprend d'intéresser aux travaux des mathématiciens une société hostile ou indifférente. Si les hommes de science, dit-il, occupent dans le monde un rang si modeste, cela tient à la difficulté, non à l'insignifiance, de leurs études; et Mersenne, dans deux chapitres de ses Questions physiques et mathématiques, *nous explique en détail « Pourquoi les savants ne parviennent pas à de si hautes situations que les vaillants » et « Pourquoi la plupart des hommes préfèrent l'argent à la science ». Il y a, cependant, dans les mathématiques, de quoi satisfaire à tous les goûts. A ceux qui, semblables aux amateurs de tulipes, s'attachent principalement aux curiosités, Mersenne recommande la musique, l'astrologie et les « gentillesses qui dépendent des miroirs et des lunettes à longue vue ». D'autres trouveront dans les mathématiques des leçons de morale et de religion. Est-il, pour parvenir à Dieu, un moyen plus sûr que l'imitation de la chute des corps pesants? Et la morale n'a-t-elle pas pour objet l'harmonie de l'esprit? Or l'harmonie est une science mathématique, une science dont les applications sont, au reste, extrêmement variées; car le monde n'est qu'un vaste instrument de musique, et « les sons peuvent être comparés aux poids, aux machines de guerre et d[e] paix, au battement du pouls et à la santé du corps et d[e] l'âme ». Non moins évidents, non moins étendus so[nt] les services que peuvent rendre à la société la géométri[e]*

l'arithmétique et la mécanique. Ingénieurs, médecins, alchimistes, philosophes, théologiens, prédicateurs, juristes, et « tous les autres qui parlent en public », et tous ceux qui pratiquent des arts libéraux, tous ont besoin, d'après le Père Mersenne, de s'initier à l'étude des mathématiques.

L'appel de Mersenne est éloquent, mais nous ne voyons pas qu'il ait été entendu. Les ouvrages du savant religieux sont tombés dans l'oubli ou dans le discrédit sans avoir convaincu personne. Et il en fut de même apparemment des innombrables écrits qui à la même époque développent le même thème : écrits singuliers et qu'il est impossible de lire aujourd'hui sans sourire, bien que naguère quelques-uns aient eu leurs jours de vogue, les Mémoires mathématiques d'Henrion, par exemple, recueillis et dressés vers 1615 « en faveur de la noblesse française ».

Aucun de ces plaidoyers n'a donné les résultats qu'on en attendait. Pourtant les mathématiciens n'ont pas eu le courage de renoncer à la faveur des foules; ils ne se sont pas résignés à être incompris; et ceux du XVIIIe siècle ont repris, sur de vieux ou sur de nouveaux airs, l'éternelle chanson. — La science des nombres est précieuse, dit l'abbé Poignard dans son Traité des quarrés sublimes (Bruxelles, 1704) : « Le grand Clavius, jésuite, a dit qu'elle élève l'homme au-dessus du commun; saint Augustin que, sans elle, on ne saurait entendre plusieurs passages de l'Ecriture Sainte; saint Jérôme ne doute pas vancer qu'elle a une force merveilleuse pour nous re concevoir plusieurs mystères de notre foi; enfin le roit nous montre clairement combien la jurisprudence a besoin; de sorte que les Mathématiques ne doivent

pas être considérées comme un pur amusement de l'esprit, mais comme une science très importante et indispensablement utile à toutes sortes de personnes et à toutes sortes d'états. » — Trente ans plus tard, le Père Castel publie une Mathématique abrégée « à l'usage et à la portée de tout le monde, principalement des jeunes seigneurs, des officiers, des ingénieurs, des physiciens, des artistes, etc. » « Il y a, dit Castel, dans toutes les parties des mathématiques, des morceaux curieux, utiles et nécessaires pour les gens du monde, et la vraie science des personnes d'un certain rang et de tout ce qu'il y a de gens d'esprit et de goût est de savoir un peu de tout cela ». Castel compose donc, pour les salons du XVIIIe *siècle, une Mathématique sans figures ni symboles, une Mathématique destinée principalement à mettre de l'ordre dans les notions scientifiques que la vie courante suggère à toute personne réfléchie et que « l'usage du monde, la lecture, la conversation, la vue de mille objets, ne laissent pas de jeter dans les esprits ».*

Par l'idée qu'il se fait de l'homme cultivé et par ses vues sur la classification des connaissances, le Père Castel est bien de son temps, d'un temps qui n'est plus. C'est en invoquant des considérations différentes que les mathématiciens du XIXe *et du* XXe *siècles recherchent l'approbation des gens du monde. Et sans doute leurs arguments font-ils impression sur beaucoup de nos contemporains. Mais que valent ces arguments en réalité, et qui sait comment les jugeront les générations futures?*

*Voici un petit ouvrage, dédié à l'enfance, mais qui a trouvé auprès de nombreux adultes un vif et légitime succès, l'*Initiation mathématique *de C. A. Laisant. Ce joli*

*livre reflète bien le goût que manifeste notre époque pour les divertissements de l'esprit et pour la science popularisée, rendue intuitive et pittoresque. Dans l'*Initiation *de Laisant il n'est question ni de saint Jérôme ni de saint Augustin, ni de la formation des avocats, ni des vertus de la logique, ni des grandes applications techniques des mathématiques. Mais nous y trouvons des chapitres intitulés* Une maison à bon marché, Le dîner cérémonieux, Le chien et les deux voyageurs, Le train du Métro. *En composant ainsi un recueil de récréations mathématiques, Laisant se fait l'héritier d'une longue tradition qui remonte à l'époque de la Renaissance. Tradition curieuse, aimable, qui, lorsqu'elle est rajeunie par un homme d'esprit, est toujours assurée d'avoir du succès. Mais est-ce bien là, je le demande, une initiation aux Mathématiques? Je suis convaincu que Laisant, comme jadis certains de ses devanciers, aura gagné le cœur de tous ses lecteurs. Mais combien auront pris vraiment son livre au sérieux? On donne parfois aux enfants des « boîtes de physique » où ils trouvent les instruments nécessaires à l'exécution de tours amusants; et il se peut bien que ces boîtes aient plus souvent que l'on ne pense éveillé des vocations scientifiques. Pourtant les tours de physique ne doivent pas être confondus avec la Physique. De même les récréations mathématiques ne sont pas le moins du monde les Mathématiques.*

Se plaçant à un autre point de vue, beaucoup de modernes amis des mathématiques insistent surtout sur les leçons de rigueur et de précision que nous pouvons tirer de cette discipline. Ils ont grandement raison de nous rappeler ainsi une vérité que certains de nos éducateurs,

semblent quelquefois oublier; mais Platon avait dit longtemps avant eux tout ce qu'il y a à dire à ce sujet; et, si c'est uniquement la formation des esprits que l'on a en vue, on peut à bon droit estimer que l'arithmétique et la géométrie de l'Athènes du Ve siècle seront, avec un peu d'algèbre, largement suffisantes. Aussi y a-t-il apparence qu'en se donnant pour un professeur de déduction le mathématicien déprécie lui-même la plus grande et la plus belle part de son activité. Si c'est là sa mission, en effet, quel besoin a-t-il de s'aventurer dans le labyrinthe de l'analyse moderne? Et pourquoi ne pas s'en tenir à l'enseignement des siècles passés? Il peut arriver, il est vrai, que certains de ses disciples bénévoles lui demandent parfois des lumières plus étendues. On rencontre à notre époque pas mal d'esprit curieux, adonnés à des spécialités diverses, qui se montrent très friands des méthodes mathématiques les plus récentes, qui déclarent ces méthodes indispensables pour la bonne conduite de leurs travaux, et qui sont toujours prêts à en célébrer les mérites en termes enthousiastes. A leur service. Remercions ces hommes de leur témoignage et ne leur refusons pas les secours techniques qu'ils demandent à nos savants. Mais gardons-nous d'exagérer la portée de ces collaborations et de voir là un triomphe dont puissent s'enorgueillir les Mathématiques. Ce n'est pas parce que quelques psychologues ou quelques économistes imiteront les raisonnements des géomètres, et en tireront des conclusions douteuses, que vingt-cinq siècles de pensée et d'efforts spéculatifs auront obtenu leur récompense.

Si nous estimons que la pensée pure ne vaut pas suffisamment par elle-même pour pouvoir se passer de légiti-

mation, alors avouons franchement que nous entendons la subordonner à l'action, et osons présenter la théorie mathématique comme une auxiliaire de l'industrie. Nous nous mettrons ainsi d'accord avec les tendances dominantes de notre époque : car c'est à la technique, assurément, que va aujourd'hui la faveur des masses, et ceux qui ont le loisir de récréer ou d'éduquer leur esprit par la science ne forment plus dans la société moderne qu'une petite minorité. Beaucoup d'excellents savants contemporains semblent d'ailleurs subir sans trop de regret l'entraînement général, et c'est avec complaisance qu'ils font miroiter aux yeux du public les belles applications pratiques qui sortiront peut-être plus tard de leurs théories.

Sans doute ces savants n'entendent-ils point pour cela s'incliner devant les praticiens et renoncer aux prérogatives dont ils ont joui jusqu'à ce jour. Il n'entre point dans leurs vues de se laisser diriger par des considérations utilitaires. Et ils développeront leurs systèmes en toute indépendance comme si ces systèmes étaient bien le but suprême de leurs efforts. Mais c'est qu'à leur avis c'est ainsi que l'on doit procéder dans l'intérêt même de la science appliquée. Qui pourrait affirmer à l'avance, font-ils observer, que les théories les plus abstraites, les plus éloignées des préoccupations actuelles, ne seront pas quelque jour utilisées par les mécaniciens ou les physiciens? Le fait se produit aujourd'hui même; il se présentera encore dans l'avenir. Bien insensé serait celui qui, ıchant cela, oserait contester au mathématicien le droit e spéculer à sa fantaisie.

La conclusion est juste, l'argument est irréfutable. Jous permettra-t-on de penser, pourtant, qu'il est d'une

nature un peu frivole ? Sans doute, bien des vérités recherchées aujourd'hui pour des raisons théoriques sont appelées à prendre plus tard une signification pratique. Mais d'autres vérités, non moins essentielles aux yeux du mathématicien, n'auront pas un sort pareil. Faudra-t-il en conclure que celles-ci sont d'un moindre prix que celles-là ? D'autre part, le fait qu'une théorie puisse servir aujourd'hui ou demain à des fins pratiques, a-t-il vraiment l'importance qu'on veut lui prêter ? En somme, une application technique n'offre jamais qu'un intérêt passager, car de nouveaux progrès techniques viendront quelque jour la démoder. Au contraire, une belle théorie mathématique s'impose pour des raisons qui garderont leur force éternellement. Les propriétés des sections coniques n'ont-elles pas la même valeur aujourd'hui que du temps d'Apollonius ? Cependant les formules qui servaient aux Alexandrins pour construire leurs ponts ou leurs navires — ou même pour dresser leurs tables astronomiques — ont perdu tout intérêt aux yeux de nos techniciens. Comment, dès lors, pourrions-nous admettre que la raison d'être d'une théorie se trouve dans ses applications ? Soutenir une pareille thèse, c'est se rendre dupe d'une illusion. Sur le moment, sans doute, c'est l'application qui retient surtout notre attention; pourtant c'est la théorie qui, parce qu'elle est immuable, occupera finalement la plus large place dans l'histoire totale de l'humanité.

Qu'est-ce à dire sinon que la question, qu'à la suite de beaucoup d'autres nous venons de nous poser, est au fond une question dépourvue de sens ? Expliquer ce qui fait le prix des mathématiques pour la société des hommes, mais c'est une entreprise irréalisable. Les valeurs sociales

tiennent à des besoins, à des occupations, à des préoccupations, qui sont en partie fortuites. Comment donc en faire dépendre la vertu et la signification profonde des propriétés mathématiques?

Il faut que nous en prenions courageusement notre parti : les véritables mathématiques ne sont pas faites pour la société. Aussi serait-il imprudent d'affirmer que leurs charmes seront à toutes les époques goûtées de celle-ci. Un caprice peut orienter les hommes vers la science, un autre les en détourner. Et à l'heure qu'il est, précisément, j'ignore si un petit livre tel que celui-ci, s'il se présente sans fard et sans parure, a chance d'être accueilli avec sympathie. Je ne puis cependant concevoir qu'une seule manière d'écrire ce livre. Son but doit être de montrer les mathématiques telles qu'elles sont et non telles qu'elles devraient être pour pénétrer facilement dans l'esprit des gens du monde et pour satisfaire les goûts modernes. Les traits qui doivent être mis en évidence ne sont pas ceux qui ont un caractère piquant ou un intérêt pratique actuel, mais ceux qui jouent un rôle fondamental dans la genèse et le développement de la pensée théorique.

L'image des mathématiques que nous obtiendrons ainsi ne risque-t-elle pas d'être un peu sévère? N'exigera-t-elle pas des personnes qui voudront la comprendre un effort d'abstraction trop soutenu? Et, laissant dans l'ombre les applications, satisfera-t-elle pleinement la curiosité de ceux qui voudraient toujours savoir le pourquoi des choses?

Il se peut que non. Mais peut-être certains lecteurs nous sauront-ils gré de n'avoir pas insisté sur les artifices qui

servent à populariser la science, puisque ce ne sont que des artifices, et de n'avoir pas expliqué le pourquoi des théories en invoquant des raisons qui n'eussent pas été les véritables. Il est bon après tout qu'un livre traitant des mathématiques reste un peu abstrus. S'il demande plus de réflexion, l'impression qui s'en dégagera sera sans doute plus conforme à la vérité.

LES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER

Les propriétés des nombres

1. Depuis les temps reculés où la spéculation mathématique a pris naissance, le *nombre* n'a cessé d'en être l'un des objets principaux, l'une des données essentielles.

Entendons-nous bien cependant. Les nombres peuvent être envisagés sous plusieurs aspects, et l'intérêt qu'y prend le pur mathématicien est un intérêt d'une nature rare et spéciale que le génie grec a soigneusement défini.

Le pur mathématicien ne cherche point à *expliquer* le nombre. Il admet que l'idée de nombre préexiste, parfaitement claire, dans l'esprit de tout homme de bon sens, et il laisse au philosophe ou au logicien le soin de rechercher les origines et le contenu exact de cette idée.

Le pur mathématicien ne s'attache pas davantage au mécanisme du calcul numérique. Contrairement à l'opinion vulgaire, le chiffre n'est pas son fait et ce n'est pas lui qui jadis en fut l'inventeur. Les premiers calculateurs furent des praticiens, des marchands, des ingénieurs. Pour les mathématiciens aussi, sans doute, le calcul est un auxiliaire indispensable, mais ce n'est qu'un instrument, ce n'est pas un but.

Supposons donc comme le fait un Pythagore ou un Platon, que nous soyons déjà maîtres de cet instrument, c'est-à-dire que nous sachions additionner, soustraire, multiplier, diviser les nombres, extraire les racines, que nous sachions aussi former les fractions, les simplifier, les réduire au même dénominateur, les additionner, etc. Alors, étant à même de nous mouvoir à notre gré dans le monde des nombres, nous pourrons entreprendre de l'explorer et d'en découvrir les beautés cachées.

Entre les nombres il y a des relations, des parentés inattendues. Il y a des *lois numériques*, souvent saisissantes par leur simplicité, ou bien par les symétries, par les harmonies qu'elles nous révèlent. Ces lois, ces harmonies, constituent ce que l'on peut appeler les propriétés ou les vertus des nombres. Par quelques exemples nous pourrons nous faire une idée de leur caractère ainsi que des problèmes qui s'y rattachent.

SUITES DE NOMBRES. SOMME DES NOMBRES IMPAIRS ET DES NOMBRES ENTIERS.

2. L'attention des créateurs de la science des nombres — les Pythagoriciens — se porta particulièrement sur certaines *suites* de nombres, se succédant suivant certaines lois déterminées et jouissant en conséquence de propriétés notables. Considérons par exemple la suite des nombres impairs, 1, 3, 5, etc., qui se suivent de deux en deux. En représentant ces nombres respectivement par 1 par 3, par 5 points, etc., etc., disposés comme l'indique la figure 1 ci-contre, les Pythagoriciens ont découvert la loi suivante : la somme des nombres impairs, arrêtée par exemple au *quatrième*

de ces nombres — c'est-à-dire la somme 1 + 3 + 5 + 7 — forme un carré (fig. 1) ; elle est égale au carré dont le côté a 4 points, c'est-à-dire au *carré de quatre* (ou, avec les notations modernes, 4^2), lequel est 16. De même la somme des *cinq* premiers nombres impairs est égale au carré de *cinq* et ainsi de suite. D'une manière générale, désignant par *n* un nombre entier quelconque, nous pouvons vérifier cette propriété : la *somme des* n *premiers nombres impairs est égale à* n^2.

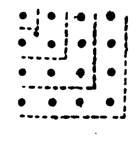


Fig. 1

Si au lieu de considérer la suite des nombres impairs, on considère la suite complète de *tous* les nombres, 1, 2, 3, etc., on constate que la somme de ces nombres possède, elle aussi, une belle propriété : *la somme des* n *premiers nombres est égale à la moitié du produit du nombre* n *par le nombre suivant* (n + 1). (Ceci est vrai quel que soit le nombre *n*; par exemple, soit *n* pris égal à 5 : l'énoncé ci-dessus veut dire que la somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 sera égale à la moitié du produit 5 × 6, soit à la moitié de 30, ou 15; on peut vérifier immédiatement qu'il en est bien ainsi.)

PROGRESSIONS ARITHMETIQUES.

3. Une suite de nombres analogues à la suite 1, 2, 3, etc., ou 1, 3, 5, etc., mais d'un type plus général, est la « progression arithmétique ». Donnons-nous un premier nombre appelé « premier *terme* » de la progression, et un autre nombre appelé *raison*. En ajoutant la raison au premier terme, nous obtenons un second terme de la progression; en ajoutant encore la raison à ce second

terme, nous obtenons un troisième terme; et ainsi de suite; de proche en proche nous formons une suite de *termes* ou de nombres qui est appelée progression arithmétique. Ainsi, par exemple, la progression arithmétique ayant pour premier terme 1 et pour raison 7 sera :

1, 8, 15, 22, 29, etc.;

la progression arithmétique de premier terme 6 et de raison 11 sera :

6, 17, 28, 39, 50, etc.

La progression artihmétique ainsi définie jouit, quels que soient le premier terme et la raison, de la propriété suivante : *La somme des* n *premiers termes d'une progression arithmétique quelconque est égale au nombre obtenu en additionnant le premier et le dernier* (le n^e^) *termes de la progression, multipliant ensuite le résultat par le nombre* (n) *des termes considérés, et divisant enfin par* 2. EXEMPLE : Faisons la somme des 5 premiers termes de la progression 1, 8, 15, etc. écrite ci-dessus. D'après notre propriété, cette somme est égale à la somme des deux termes 1 et 29 (c'est-à-dire 30), multipliée par 5 (ce qui donne 150) et divisée par 2 (ce qui donne 75). En d'autres termes, on a l'égalité, facile à vérifier :

$$1 + 8 + 15 + 22 + 29 = \frac{(1 + 29) \times 5}{2} = 75$$

On obtient d'autres propriétés non moins admirables

en considérant, au lieu de la somme des termes de la progression, la somme des *carrés* de ces termes, ou la somme de leurs *cubes*, ou la somme de leurs *quatrièmes puissances*, etc.

Je rappelle que le *carré* d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même; le *cube* est le produit du carré du nombre par le nombre lui-même; la *quatrième puissance* est le produit du cube du nombre par le nombre lui-même; et ainsi de suite. Ainsi, par exemple, le carré de 2 est 4, son cube est 4×2 (c'est-à-dire 8), sa quatrième puissance est 8×2 (c'est-à-dire 16), etc. Le carré d'un nombre tel que 2, 3, 5 est figuré en arithmétique par la notation (signe d'écriture) suivante : 2^2, 3^2 ou 5^2. Le cube est figuré par la notation 2^3, 3^3 ou 5^3, La quatrième puissance est figurée par la notation 2^4, 3^4 ou 5^4. Et ainsi de suite.

Cela posé, considérons par exemple les 5 premiers termes de la progression, 1, 8, 15, etc. La somme des carrés de ces termes est $1 + 8^2 + 15^2 + 22^2 + 29^2$. La somme de leurs cubes est $1 + 8^3 + 15^3 + 22^3 + 29^3$, etc. Eh bien, on constate que ces sommes ont des valeurs reliées par une parenté remarquable à la valeur de la raison et à celle du premier terme de la progression. Et cette parenté existe quelle que soit la progression envisagée et quel que soit le nombre n des termes que l'on considère dans cette progression.

C'est là un fait auquel les grands mathématiciens français du XVIIe siècle, notamment Fermat, Pascal, se sont vivement intéressés. Ils étudièrent en particulier la somme des carrés ou des cubes des *n premiers nombres entiers*. Ainsi ils remarquèrent (ce que savaient déjà les Grecs)

que la somme des carrés des n premiers nombres (1, 2, 3, etc. jusqu'à n) est égale au nombre n, multiplié par $n + 1$, multiplié ensuite par $2n + 1$, divisé enfin par 6. EXEMPLE : la somme des carrés des cinq premiers nombres ($1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$) est égale (*) à 5, multiplié par $5 + 1$ [ce qui donne 30], multiplié par $2 \times 5 + 1$ (ou 11) [ce qui donne 330] divisé enfin par 6 [ce qui donne 55] ; et, effectivement, nous vérifions que :

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$
$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

PROGRESSIONS GEOMETRIQUES. 4. En dehors des progressions arithmétiques, bien d'autres suites de nombres jouissent de propriétés dignes d'attention, notamment les suites appelées « progressions géométriques ». Donnons-nous un premier nombre appelé « premier terme » de la progression et un autre nombre appelé *raison*. En *multipliant* le premier terme par la raison, nous obtenons un second terme de la progression; multipliant ce terme, à son tour, par la raison, nous obtenons un troisième terme, et ainsi de suite; de proche en proche nous formons une suite indéfinie de nombres dite « progression géométrique ». Ainsi, par exemple, la progression ayant pour premier terme 4 et pour raison 3, sera :

4, 12, 36, 108, 324, 972, etc.

chaque terme se déduisant du précédent en multipliant ce précédent terme par 3.

(*) Le carré 1^2 de 1 étant égal à 1, j'écris 1 *tout court*.

L'une des principales propriétés de la progression géométrique est — comme dans le cas de la progression arithmétique — celle qui a trait à la *somme des* n *premiers termes*. Quel que soit *n*, cette somme se trouve égale au nombre obtenu en divisant l'une par l'autre : 1° *la différence entre le* $(n+1)^{me}$ *terme* (*) *de la progression et le premier terme; 2° la différence entre la raison et le nombre 1.* — EXEMPLE : la somme des 4 premiers termes de la proposition 4, 12, 36, etc., écrite ci-dessus est obtenue en formant, d'une part, la différence 324 — 4 entre le *cinquième* terme et le premier (soit 320), d'autre part la différence entre la raison 3 et le nombre 1 (soit 2), puis en divisant 320 par 2, ce qui donne 160; et en effet, on peut vérifier immédiatement que 4 + 12 + 36 + 108 est bien égal à 160.

MBRES PREMIERS. FACTEURS PREMIERS.

5. Nous pourrions citer bien d'autres propriétés des progressions ou suites de nombres de divers types. Mais il faut nous limiter et d'ailleurs ce n'est pas de ce côté que nous découvririons les plus beaux trésors du pays des nombres. Plus remarquables encore sont les propriétés relatives aux *diviseurs* des nombres et aux *nombres premiers.* Toutefois l'intelligence de ces propriétés-là n'est possible que moyennant un grand effort d'abstraction, et c'est pourquoi nous n'en donnerons ici que le point de départ.

On sait que lorsqu'un nombre en divise exactement un autre (c'est-à-dire lorsque la division ne donne pas de

(*) Terme qui *suit* le n^{me} terme (le n^{me} terme est le dernier terme inclus dans la somme de n termes envisagée).

reste), il est dit *diviseur* de cet autre nombre. Ainsi 3 est un diviseur de 6, de 27 ou de 330. Inversement les nombres tels que 6, 27 ou 330 sont dits *multiples* de 3, et l'on dit aussi qu'ils sont *divisibles* par 3. Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même; s'il n'a pas d'autres diviseurs il est dit *nombre premier*.

Cette dernière définition pose immédiatement un problème qui est peut-être le plus difficile de toute l'arithmétique et contre lequel se débattent encore les savants modernes. Considérons la suite des n premiers nombres (1, 2, 3, etc., jusqu'à n) et de cette suite extrayons les nombres qui sont *premiers* : nous obtenons ainsi une nouvelle suite, la « suite des *nombres premiers inférieurs à* n » (ces nombres premiers étant de plus en plus grands à mesure que l'on avance dans la suite), et nous devons, naturellement, nous poser les questions suivantes : Quelles sont les propriétés de cette « suite des nombres premiers inférieurs à n »? Combien de termes comprend-elle? Existe-t-il une *loi* quelconque qui permette de trouver immédiatement tel terme de la suite que l'on voudra (par exemple le 50me ou le 1000me nombre premier), ou qui permette de déterminer d'emblée les nombres premiers compris dans un intervalle arbitraire tel que l'intervalle de 10.000 à 10.020?

A ces questions nous ne savons pas répondre d'une façon précise. Sans doute est-il facile, en prenant tous les nombres un à un, de reconnaître quels sont ceux qui ne sont pas premiers et d'obtenir par élimination les premiers « nombres premiers »

1, 2, 3, 5, 7, 11 13, 17, 19, 21, 23, 29, etc.;

et ainsi, à condition d'y mettre assez de temps, nous pourrions déterminer autant de termes que nous voudrions de la suite des nombres premiers. Mais ce n'est là qu'un calcul, — aveugle et pesant, — d'où ne se dégage aucune loi, aucune propriété. Le praticien peut s'en contenter, non le mathématicien. Ce que ce dernier cherche, c'est le secret qui précisément le dispensera de faire tous ces calculs et lui permettra de prévoir d'emblée le résultat. C'est ainsi que tout à l'heure nous avons formulé des lois permettant de dire *d'avance* à quoi est égale une somme de termes, sans prendre la peine d'additionner ou même de former tous ces termes. Or, en ce qui concerne la suite des nombres premiers, nous ne connaissons pas de loi générale remplissant le même office. Mais nous possédons, par contre, pas mal de secrets particuliers qui nous révèlent des parentés liant entre eux les nombres premiers ainsi que divers autres nombres ou groupes de nombres connexes. Citons, à titre d'exemple, ce théorème de Fermat (1640) : « *Si* p *est un nombre premier et* a *un nombre non divisible par* p, *la différence* $a^{p-1} - 1$ *est divisible par* p [le symbole a^{p-1} désigne, comme on sait, la $(p-1)^{me}$ puissance du nombre *a*, c'est-à-dire le produit obtenu en multipliant $(p-1)$ fois le nombre *a* par lui-même]. Citons encore ce théorème de Wilson et Leibniz (fin du XVIIe siècle) : « *Si* p *est un nombre premier, le produit des* $(p-1)$ *premiers nombres* [produit $1 \times 2 \times 3 \times$ ...etc., jusqu'à $(p-1)$] *augmenté de 1 donne un nombre divisible par* p. *Si au contraire* p *n'est pas premier, le même produit augmenté de 1 donne un nombre non divisible par* p. »

En regard de la théorie des nombres premiers, les

mathématiciens ont édifié une théorie des nombres non-premiers qui a rencontré moins de difficultés et dont les principes sont bien connus, car l'arithmétique pratique s'en est emparée et en a vulgarisé les applications.

Ainsi nul écolier n'ignore aujourd'hui que tout nombre non-premier peut être regardé comme un produit de facteurs qui sont des nombres premiers. (Par exemple, 735 est le produit obtenu en multipliant 3 par 5, puis par 7 et encore une fois par 7, ce qu'on écrit : $735 = 3 \times 5 \times 7^2$.)

L'opération consistant à remplacer un nombre quelconque par un produit de nombres premiers est appelée « décomposition du nombre en facteurs premiers ». Partant de là, on définit ce qu'on appelle le plus *grand commun diviseur* de plusieurs nombres, c'est-à-dire le plus grand nombre par lequel tous les nombres considérés se trouvent être divisibles. On définit pareillement le *plus petit commun multiple* de plusieurs nombres, qui est le plus petit de tous les nombres divisibles à la fois par chacun des nombres considérés. Plus grands communs diviseurs et plus petits communs multiples jouissent de propriétés diverses et donnent matière à des théorèmes variés.

EQUATIONS ARITHMETIQUES.

6. Je signale, pour terminer ce chapitre, un problème dont l'étude met en jeu les propriétés les plus complexes, les plus subtiles, de la théorie mathématique des nombres : le problème des équations arithmétiques. Il s'agit de trouver des nombres satisfaisant à certaines relations d'égalité formulées à l'avance.

Soit par exemple à *trouver trois nombres tels que la*

somme des carrés des deux premiers soit égale au carré du troisième.

Appelant x, y, z, les trois nombres inconnus nous disons que le problème proposé consiste à « résoudre l'équation »

$$x^2 + y^2 = z^2$$

On a une solution de la question en faisant $x = 3$, $y = 4$ et $z = 5$, et l'on peut déterminer une infinité d'autres groupes de trois nombres satisfaisant à la même équation.

Par contre, l'on a *démontré* qu'il n'existe aucun groupe de trois nombres entiers tels que la somme des cubes des deux premiers soit égale au cube du troisième. En d'autres termes, l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3$$

n'a pas de « solution ». Fermat a, plus généralement, affirmé que, quel que soit le nombre m supérieur à 2 l'équation

$$x^m + y^m = z^m$$

où x^m, y^m, z^m désignent les m[mes] puissances des nombres inconnus x, y, z, *n'a pas de solutions.* Mais Fermat ne nous a pas laissé de *démonstration* de ce théorème, et tous les efforts faits depuis lui pour en établir la vérité sont demeurés infructueux.

Aussi bien les mathématiciens de l'époque moderne se

sont-ils, en majorité, quelque peu détournés de l'étude des nombres. Ils ont relégué au second plan cette branche de la science, non pas, comme on le croit souvent, parce que c'est de toutes la plus abstraite et la plus inutile, mai plutôt parce que, s'y trouvant submergés dans une mer de difficultés, ils n'aperçoivent pas le fil conducteur qui leur permettra de reprendre leur course interrompue et de la poursuivre avec sûreté.

CHAPITRE II

Les propriétés des figures

7. Les philosophes grecs distinguaient quatre branches dans la science mathématique : arithmétique, géométrie, musique, astronomie. Mais la musique ne se sépare de l'arithmétique que là où elle dépend de la physique; l'astronomie telle que la concevaient les Grecs est une application de la géométrie à l'étude des phénomènes célestes. Donc, en fin de compte, l'édifice mathématique repose tout entier sur deux assises seulement : l'étude des nombres ou *arithmétique*, l'étude des figures ou *géométrie*.

De quel point de vue le mathématicien étudiera-t-il les figures? D'un point de vue semblable à celui où il s'était placé pour considérer les nombres.

Contrairement à ce que pourrait faire croire le mot qui la désigne, la « géométrie » n'a pas pour objet d'effectuer des mesures sur les longueurs, les superficies ou les volumes. C'est là proprement l'office des ingénieurs ou des arpenteurs. Et sans doute à l'origine ceux-ci se sont-ils intitulés « géomètres »; mais Platon, qui mettait la tech-

nique au ban de la science, leur a défendu de porter ce nom. Ne mérite, depuis Platon, d'être appelé *géomètre* que le savant désintéressé, qui étudie les figures pour elles-mêmes, avec le désir de découvrir leurs lois, leurs harmonies, leurs vertus secrètes.

D'ailleurs, de même que pour explorer le monde des nombres, il faut se servir du calcul, de même, pour se mouvoir dans le monde des figures il convient d'utiliser les notions et les procédés qu'ont imaginés les arpenteurs et qui servent à construire les figures fondamentales et à comparer ou à mesurer les grandeurs les plus usuelles. Remettons-nous rapidement en mémoire les principales données et opérations dont nous aurons ainsi à faire usage.

8. Pour composer ou décomposer une figure quelconque, pour en déterminer la structure et les caractères, on utilise surtout des *lignes droites*, construites avec la règle, et des *circonférences de cercles* tracées avec le compas. Même si la figure à étudier n'est formée ni de droites ni de cercles — s'il s'agit d'une ellipse, par exemple, — c'est en étudiant les relations qu'a cette ellipse avec certaines droites et certains cercles auxiliaires qu'on en manifestera les propriétés.

Dans l'espace à trois dimensions, une autre figure fondamentale se présente ; le *plan* (dont nous avons des exemples en considérant une feuille de papier, la surface d'une table, la surface d'un mur). Pour définir un plan particulier et pour obtenir tous les points de l'espace qui sont situés dans ledit plan, il suffit d'appliquer la remarque suivante : considérons deux droites qui se coupent au point A et que nous supposerons indéfiniment prolongées

dans les deux sens (fig. 2; pour désigner ces droites, nous les appellerons « droite X′ A X ou X′ X » et « droite Y′ A Y ou Y′ Y »). Prenons ensuite un point quelconque B sur la première droite, un point C sur la seconde et joignons B et C par une droite que nous prolongeons indéfiniment (droite Z′Z). Tous les points des trois droites X′X, Y′Y et Z′Z appartiendront à un même plan. Et, en répétant l'opération ci-dessus pour toutes les positions possibles du point B sur X′X et du point C sur Y′Y, nous obtiendrons *une infinité de positions différentes de la droite Z′Z, positions qui toutes sont situées tout entières dans le même plan et dont l'ensemble recouvre entièrement ledit plan.*

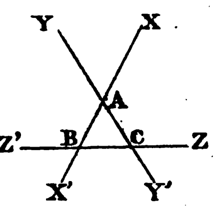


FIG. 2

9. La définition du plan ainsi présentée nous suggère presque immédiatement certaines remarques bien connues, concernant la disposition relative des droites que l'on peut tracer *dans un même plan.* Nous observons que deux droites d'un plan se rencontreront généralement; elles se couperont en un point (et un seul). Il nous apparaît cependant que cette règle comporte une exception. En effet, si deux droites tracées sur la même feuille de papier (le même plan) sont disposées comme l'indique la figure 3 ci-contre, elles ne se rencontreront pas, quelque loin qu'on les prolonge : on dit en ce cas qu'elles sont *parallèles.*

Je n'insisterai pas ici sur l'importance de la notion de parallélisme. C'est certainement l'une des notions géométriques que les praticiens (arpenteurs et architectes) ont

connue et utilisée le plus anciennement. Elle est à la base des règles communément adoptées pour la construction des maisons. Lorsque plus tard les mathématiciens cherchèrent à formuler en termes précis le contenu de cette notion, ils en définirent ainsi la signification et la portée : *par un point* A *pris hors d'une droite* B C *on peut mener une et une seule parallèle à* B C (fig. 3).

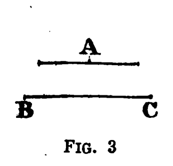


FIG. 3

10. Lorsqu'on analyse les caractères distinctifs des figures, on se trouve constamment amené à *comparer* entre elles, ou bien à *additionner* ou à *retrancher*, plusieurs grandeurs de même espèce. Ce sont là des opérations avec lesquelles les travaux des arpenteurs ont depuis longtemps familiarisé l'humanité.

Deux figures quelconques seront dites *égales*, ou, plus précisément, *congruentes*, si, en déplaçant l'une d'elles, on peut l'amener à coïncider exactement avec l'autre. C'est sur cette définition que reposent les démonstrations des *cas d'égalité* des triangles (il serait plus exact de dire : *cas de congruence*) qui sont enseignées aux écoliers.

Cela dit, considérons d'abord une portion de droite A B qui constitue ce qu'on appelle une *longueur*. D'après la définition qui précède on pourra toujours comparer au point de vue de leur grandeur deux longueurs quelconques A B et A′ B′ (fig. 4). Appliquons en effet A′ B′ su

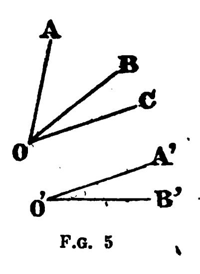
FIG. 4

A B, en faisant coïncider les deux points A et A′. Si, une fois l'application faite, B′ coïncide avec B, c'est que les longueurs sont *égales*. Si B′ tombe à gauche de B, c'est que la longueur A′ B′ est *plus petite* que A B (c'est ce qui arrivera dans le cas de la figure 4 ci-contre). Si au contraire B′ vient à droite de B, nous en concluons que A′ B′ est *plus grande* que A B. D'autre part, étant données deux longueurs telles que A B et A′ B′, on saura toujours les *additionner* ou les *soustraire* l'une de l'autre. Portons, à partir de B, et *sur le prolongement de* A B (fig. 4) une longueur B C égale à A′ B′ : la longueur A C sera alors la somme de A B et B C, donc la *somme* de A B et A′ B′. Portons au contraire la longueur A′ B′ (supposée plus petite que A B) *sur* A B *elle-même*, et cela à partir de B vers la gauche; cette longueur se trouve alors représentée par B D (égale à A′ B′, fig. 4) et A D est la *différence* des deux longueurs A B et A′ B′.

Ayant ainsi donné un sens précis aux opérations de l'*addition* et de la *soustraction* appliquées aux longueurs. nous voyons immédiatement ce qu'il faut entendre par la *multiplication* ou la *division* d'une longueur par un nombre entier. Je veux dire qu'étant donnée une longueur A B, nous saurons très facilement former une longueur double, triple, quadruple de A B, c'est-à-dire égale à la *longueur* A B *multipliée par* 2, *par* 3, *ou par* 4, etc. De même nous voyons clairement quel sens il faut attacher à l'expression « *moitié*, *tiers* ou *quart* de A B », c'est-à-dire « *longueur* A B *divisée par* 2, *par* 3, *par* 4, etc ».

11. Ce que nous venons de dire sur les longueurs,

nous pouvons le répéter à propos des angles. Soient donnés deux angles A O B et A′ O′ B′ (fig. 5). Faisant coïncider O′ A′ avec O A de façon que O′ B′ soit à droite de O A, nous voyons que les deux angles seront *égaux* ou *inégaux* suivant que, dans sa nouvelle position, O′ B′ coïncidera ou non avec O B. Dans le cas de la figure ci-contre l'angle A′ O′ B′ est *plus petit* que A O B. Pour *additionner* les deux angles, on portera au-dessous de O B un angle B O C égal à A′ O′ B′ : le grand angle A O C se trouvera alors égal à la *somme* de A O B et A′ O′B′. De même on peut soustraire un angle d'un autre, multiplier un angle par 2, 3 ou 4, etc., diviser un angle par 2, 3, 4, etc.



F.G. 5

En particulier, considérons l'angle formé par deux demi-droites A B, A C situées en prolongement l'une de l'autre. Ces deux demi-droites forment *le plus grand angle possible.* Divisant cet angle par 2, nous formons deux angles égaux B A D et C A D qui sont dits *angles droits* (fig. 6). La droite A D qui divise ainsi en deux l'angle B A C est dite, comme on sait, « droite *perpendiculaire* sur B C (au point A). »

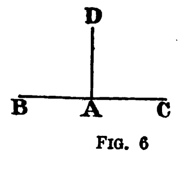


FIG. 6

12. Des considérations analogues permettent de comparer, d'additionner, de soustraire, des grandeurs superficielles ou des volumes.

Supposons que deux figures différentes puissent être

l'une et l'autre décomposées en un même nombre de figures partielles qui soient congruentes deux à deux (au sens indiqué au n° 10), c'est-à-dire qui puissent être mises en coïncidence exacte. En ce cas l'on dira que les deux figures totales ont des *superficies égales*. Ainsi, par exemple, sur la figure 7, les deux « quadrilatères » A B C D et A′ C′ B′ D′ (figures à 4 côtés rectilignes) ont des superficies égales, car elles sont composées, la première des deux triangles A B C, B C D, la seconde des deux triangles A′ B′ C′, D′ B′ A′, et il se trouve que le triangle A B C est congruent au triangle A′ B′ C′, le triangle B C D congruent au triangle D′ B′ A′. D'ailleurs, bien que de superficies égales, les deux quadrilatères ne sont pas eux-mêmes congruents l'un à l'autre, car il est impossible de les faire coïncider en les plaçant *l'un sur l'autre* : ils sont seulement composés de parties congruentes deux à deux.

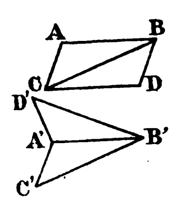


FIG. 7

Le moyen que nous venons d'employer pour comparer deux superficies implique, on s'en est rendu compte, la notion d'*addition* ou de *soustraction de deux superficies*. Ainsi la superficie A′ C′ B′ D′ est la somme des superficies A′ B′ C′ et A′ B′ D′, fait que l'on exprime plus brièvement en disant que le quadrilatère est la somme des deux triangles. De même le triangle A′ B′ D′ est la différence entre le quadrilatère A′ C′ B′ D′ et le triangle A′ B′ C′.

En appliquant ces principes, nous saurons effectuer sur les grandeurs superficielles toute une série de calculs.

Ces calculs (*) nous permettent de donner un sens à une notion qui, à première vue n'en offrait aucun, la notion de *multiplication de deux longueurs l'une par l'autre.* Par définition le *produit* de deux longueurs A B et A C sera regardé comme une grandeur égale à la superficie du rectangle A B C D ayant pour côtés (**) A B et A C (fig. 8.). Dans le cas où les deux longueurs A B et A C seront égales entre elles, le produit considéré deviendra le produit de la longueur A B par elle-même et il sera égal à la superficie du carré de côté A B (fig. 8 à droite) ; on dira alors que ce produit est le « *carré de* A B » (on le désignera généralement par le symbole $\overline{AB}^2$).

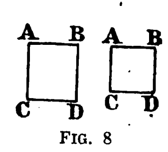


FIG. 8

13. Nous venons de voir en quel sens et par quels procédés on peut effectuer des comparaisons et des calculs sur les grandeurs géométriques. Ces mêmes grandeurs peuvent être comparées d'un autre point de vue encore, conformément à un principe qui était familier, lui aussi, aux arpenteurs dessinateurs ou ingénieurs des temps les plus reculés. Je veux parler du principe de la *similitude.*

Considérons une figure et supposons qu'en en conservant toutes les proportions nous en fassions une image

(*) Les calculs relatifs aux volumes à trois dimensions permettent de même de donner un sens aux notions de *produit de trois longueurs* et de *cube d'une longueur.*

(**) Pour définir un rectangle (figure formée de 4 droites se coupant à angles droits) il suffit d'indiquer les longueurs de deux de ses côtés, les côtés opposés étant respectivement égaux.

à une échelle réduite ou agrandie. Nous obtenons ainsi une nouvelle figure qui a la même forme, les mêmes caractéristiques, les mêmes propriétés que la première et qui en diffère seulement par ses dimensions. On dit que cette nouvelle figure est *semblable* à la première. C'est ce que savaient déjà fort bien les artistes de l'Egypte ancienne chargés de la décoration des chambres funéraires; ils avaient en effet l'habitude de reproduire à des échelles variables des personnages ou des scènes conformes à des modèles immuables.

La propriété fondamentale par laquelle se manifeste la similitude de deux figures est la *proportionnalité* des longueurs qui s'y rencontrent. Quand on passe d'une figure à l'autre toutes les longueurs sont réduites ou augmentées dans la même proportion. Il s'ensuit que si A B et C D sont deux longueurs de la première figure, A′ B′ et C′ D′ les longueurs correspondantes de la seconde figure, on a entre les quatre longueurs une relation de proportionnalité que l'on énonce en disant « A′ B′ *est à* A B *comme* C′ D′ *est à* C D » et que l'on écrit symboliquement sous forme d'égalité :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} \tag{1}$$

Mais supposons que l'on ait affaire à quatre longueurs A B, C D, A′ B′, C′ D′ sans savoir encore si elles appartiennent à des figures semblables. Comment saura-t-on si ces longueurs sont « proportionnelles », c'est-à-dire si elles satisfont à la « relation de proportionnalité » écrite ci-dessus? Une règle simple, très anciennement connue sans doute, et que précisèrent les géo-

mètres grecs, permet de répondre à cette question. Prenons deux droites quelconques A X et A Y se coupant au point A. Sur la droite A X plaçons bout à bout les longueurs A B et C D (l'origine de la seconde longueur coïncidant avec l'extrémité B de la première). Sur la droite A Y portons bout à bout les longueurs A′ B′ et C′ D′. *Si la relation de proportionnalité est satisfaite, les deux droites* B B′ *et* D D′ *se trouveront être parallèles.* Réciproquement, *si les* droites *B B′ et D D′ sont parallèles, les quatre longueurs satisferont à la relation de proportionnalité :* elles seront « *proportionnelles* ».

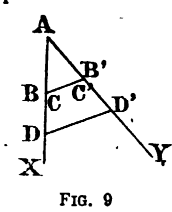


Fig. 9

14. Poursuivant l'étude de la notion de proportionnalité (indépendamment, cette fois, de la considération des figures semblables) on découvre de nombreuses propriétés qui s'y rattachent et l'on en tire les règles d'un « calcul géométrique » *sui generis*, le calcul des proportions.

Désignons, pour abréger, par un numéro entre parenthèses, soit (1), la relation de proportionnalité écrite plus haut, et appelons cette relation une « proportion ». On constate, que si l'on a entre les quatre longueurs considérées la proportion (1), on aura aussi la proportion

$$(2) \qquad \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

On aura également les proportions

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B' + C'D'}{AB + CD}$$

D'autre part, si l'on traitait les longueurs A B, A' B', etc., comme des grandeurs numériques (*) et par suite les rapports $\frac{A'B'}{AB}$, etc., comme des *fractions* (**), on déduirait de l'égalité (1) [en multipliant les deux fractions égales par le produit $AB \times CD$ ce qui ne détruit par l'égalité] la nouvelle relation d'égalité suivante :

$$A'B' \times CD = AB \times C'D' \quad (3)$$

Or, cette assimilation des longueurs aux grandeurs numériques est parfaitement légitime : en effet (là-dessus reposent tous les calculs des arpenteurs) les longueurs sont toutes *mesurées* par des nombres entiers ou fractionnaires (soit exactement, soit, du moins, avec une approximation (***) aussi grande que l'on voudra) ; en sorte qu'à toute longueur correspond une grandeur numérique et inversement. Il suit de là que l'égalité (3) exprime une vérité géométrique précise, une « propriété » remarquable des quatre longueurs considérées, propriété qui donne une signification nouvelle à la notion de « produit de deux longueurs » [on se rappelle qu'au n° 12 nous avons interprété le produit de deux longueurs comme représentant la grandeur superficielle d'un rectangle].

(*) Nombres proprement dits (nombres entiers) ou nombres fractionnaires (fractions).

(**) Le rapport de deux *nombres* entiers est, par définition, une *fraction*. Le rapport de deux nombres fractionnaires peut toujours être mis sous la forme du rapport de deux nombres entiers et est donc encore une fraction.

(***) Voir plus bas, chap. IV, n°s 38 et 53.

Envisageons en particulier le cas où les longueurs A B et C′D′ sont égales entre elles. Alors le second membre de l'égalité (3) devient le *produit de la longueur* A B *par elle-même;* et l'égalité (3) devient

$$(4) \quad \overline{AB}^2 = A'B' \times CD$$

Lorsqu'une telle égalité a lieu entre trois longueurs A B, A′ B′ et C′ D′, on dit que la *longueur* A B *est moyenne proportionnelle entre* A′ B′ et C D.

15. Le calcul des proportions, dont nous venons d'indiquer le principe, sert en premier lieu, comme nous l'avons dit, à étudier les *figures semblables*. Parmi celles-ci, les plus simples et les plus fréquemment utilisées dans la pratique sont les *triangles* et les figures planes limitées par des droites que l'on appelle *polygones* et qui se laissent d'ailleurs toujours décomposer en triangles (*Exemple, fig. 10* : le polygone à 5 côtés, ou pentagone, A B C D E, se trouve divisé en trois triangles lorsque l'on trace les lignes en pointillé A C et A D).

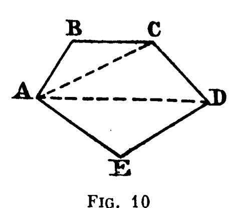


FIG. 10

Nous avons un premier exemple de triangles semblables dans les triangles A B B′ et A D D′ de la figure 9 (voir plus haut) qui ont deux côtés relativement appliqués sur les mêmes droites (A X et A Y) et leurs troisièmes côtés parallèles. Et nous constatons que ces deux triangles jouissent des propriétés suivantes :

1° *Leurs angles sont égaux deux à deux* (l'angle en A

est le même pour les deux triangles; l'angle de sommet B du premier triangle est égal à l'angle de sommet D du second triangle; l'angle de sommet B′ est égal à l'angle de sommet D′).

2° *Leurs côtés* [j'entends : *les longueurs de leurs côtés*] *sont deux à deux proportionnels, ce qui veut dire que l'on a les deux proportions* (*)

$$\frac{AB'}{AD'} = \frac{AB}{AD} \text{ et } \frac{AB}{AD} = \frac{BB'}{DD'}$$

ou, comme on a coutume d'écrire plus brièvement (**)

$$\frac{AB'}{AD'} = \frac{AB}{AD} = \frac{BB'}{DD'}$$

Les propriétés ainsi énoncées sont — l'analyse de la notion de *similitude* le montre — les propriétés caractéristiques de deux triangles semblables quelconques. Plus généralement, si deux polygones d'un nombre quelconque de côtés sont semblables, *leurs angles* seront

(*) La première de ces proportions n'est autre que la proportion

$$\frac{AB'+C'D'}{AB+CD} = \frac{AB'}{AB}$$

que nous avons déjà indiquée plus haut au n° 14.

(**) On remarquera que dans cette double proportion, les côtés que l'on rapproche pour en considérer les rapports sont des côtés *opposés* à des angles égaux des deux triangles (ainsi AB′ est *opposé* à l'angle de sommet B et AD′ est *opposé* à l'angle égal de sommet D).

égaux deux à deux et leurs côtés proportionnels deux à deux.

16. Tous les modes de comparaison entre figures, tous les procédés de calcul géométrique que nous venons d'indiquer, constituent l'arsenal commun des hommes qui étudient les figures pour des fins pratiques et de ceux qui les considèrent en vrais géomètres. Armés de ces notions et de ces méthodes, les mathématiciens qui spéculent sur le monde géométrique y découvrent, pour peu qu'ils ouvrent bien les yeux de leur esprit, une foule de propriétés admirables. Nous allons citer ici quelques-unes de ces propriétés, — choisies parmi les plus connues et parmi les plus simples, — afin d'en montrer le caractère et d'en faire, si possible, apprécier l'intérêt.

ANGLES FORMÉS PAR DES PARALLELES.

17. Soient X′X et Y′Y deux droites parallèles coupées par une troisième droite quelconque Z′Z. Cette dernière droite (souvent appelée *transversale*) forme avec les deux parallèles huit angles que j'indique sur la figure 11 par des numéros. En comparant ces angles on constate : 1° que les angles 3 et 6 sont égaux de même que les angles 4 et 5 (ces angles sont dits deux à deux *alternes-internes*) ; 2° que les angles 1 et 8 sont égaux de même que les angles 2 et 7 (ces angles sont dits deux à deux *alternes-externes*) ; 3° que les angles 1 et 5 sont égaux de même

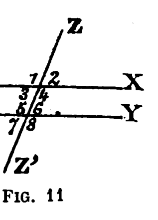


FIG. 11

que les angles 2 et 6, ou 3 et 7 ou 4 et 8 (ces angles sont dits deux à deux *correspondants* (*). — D'ailleurs ces propriétés ne se présentent que dans le seul cas où les droites X′ X et Y′ Y sont parallèles : ce sont des *propriétés caractéristiques* des droites parallèles.

…MME …S ANGLES …UN TRIANGLE

18. Tous les triangles jouissent d'une même propriété extrêmement simple et saisissante : la *somme de leurs trois angles est égale à deux angles droits.* Ceci signifie (conformément aux remarques faites plus haut au n° 11) que si, ayant un triangle quelconque A B C d'angles 1, 2, 3 (voir fig. 12), on porte à droite de A C un angle C A E (angle 4) égal à l'angle 2, puis un angle E A D (angle 5) égal à l'angle 3, la *somme* des angles 1, 4, 5 vaudra deux angles droits; ce qui revient à dire que les *côtés* A B et A D *de l'angle-somme sont en prolongement l'un de l'autre* (*forment une même droite*).

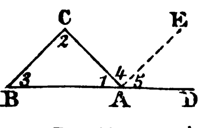


FIG. 12

Remarquons en passant que la droite A E, que nous devons construire pour former l'angle 4, jouit de la propriété d'être *parallèle* au côté B C du triangle. En effet, du fait que les angles alternes-internes 2 et 4, formés par la droite transversale C A avec les deux droites C B et A E, sont des angles égaux, il résulte que ces deux dernières droites sont parallèles (n° 17).

(*) Ajoutons que les angles tels que 1 et 4 ou 2 et 3 sont égaux comme « opposés par le sommet ». Ce dernier fait qui concerne les angles formés par Z′Z avec X′X seulement (ou Y′Y seulement) est indépendant des propriétés des droites parallèles.

DIVERSES PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES

19. D'un sommet A d'un triangle, abaissons la perpendiculaire A H sur le côté opposé B C; joignons, d'autre part, A au milieu M de B C; menons enfin la droite A D qui divise en deux angles égaux l'angle B A C. Les deux droites A H, A M sont appelées respectivement *hauteur* et *médiane* du triangle relatives au côté B C; la droite A D est appelée *bissectrice* de l'angle A. Construisant les droites correspondantes issues des

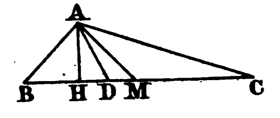


FIG. 13

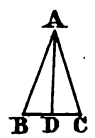


FIG. 14

deux autres sommets B et C, du triangle, on constate les propriétés suivantes :

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point.

Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un même point.

Un triangle qui a deux côtés égaux (*triangle isoscèle*) jouit en outre de propriétés spéciales : *les angles qui, dans le triangle* isoscèle, *sont opposés aux côtés égaux* (angles B et C sur la fig. 14) *sont égaux; la bissectrice* A D *du troisième angle se trouve être en même temps hauteur* et *médiane relative au côté* B C.

IERES PRO- ÉS DU CERCLE **20.** Un cercle ou circonférence est, comme on sait une courbe plane dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre du cercle.

Soient A et B deux points quelconques de la circonférence (fig. 15). La droite qui les joint est appelée corde. Elle jouit de cette propriété que si *l'on abaisse sur elle du centre du cercle une perpendiculaire* O H, *cette perpendiculaire la coupe en deux parties égales* (le pied H de la perpendiculaire est au milieu de A B).

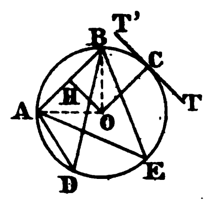


FIG. 15

Une droite telle que T' T (fig. 15), qui touche le cercle en un point unique C, est appelée *tangente* au cercle. Elle jouit de cette propriété que la droite ou *rayon* du cercle qui joint le centre au point de contact C est perpendiculaire sur elle.

Si nous joignons les *mêmes* points A et B à d'autres points quelconques du cercle tels que D, E, nous obtenons des angles tels que A D B, A E B qui sont tous *égaux entre eux* (en d'autres termes, on a *angle* A D B = *angle* A E B, et la valeur de l'angle A D B reste la même lorsque les points A et B demeurant fixes, le point D se déplace sur la circonférence). *Chacun de ces angles égaux est d'ailleurs la moitié de l'angle* A O B (obtenu en joignant A et B au centre du cercle).

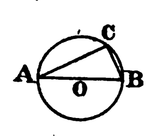


FIG. 16

Dans le cas où la *corde* A B passe par le centre du rcle (elle est dite alors « diamètre » du cercle), l'angle

A C B obtenu en joignant A et B à un autre point *quelconque*, C, de la circonférence est toujours un *angle droit* (fig. 16).

QUELQUES PROPRIÉTÉS QUANTITATIVES DES TRIANGLES.

21. Les propriétés que nous avons signalées jusqu'ici ont un caractère qualitatif; aucune relation de grandeur n'y intervient (en dehors de certaines *égalités* de longueurs ou d'angles). Voici maintenant quelques propriétés mettant en jeu le calcul des « proportions », dont nous avons parlé plus haut et ayant, de ce fait, un caractère quantitatif.

Soit A B C un triangle dont un angle (l'angle du sommet A ou angle A) est un angle droit. Ce triangle est dit *triange rectangle* (rectangle en A) : le côté B C, opposé à l'angle droit, en est l'*hypoténuse*. Abaissons du point A la perpendiculaire A H sur B C (hauteur du triangle). Entre les longueurs qui apparaissent alors sur la figure (fig. 17), nous découvrons toute une série de relations remarquables :

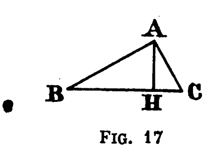


FIG. 17

La hauteur A H (c'est-à-dire la longueur de cette hauteur) *est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse* (longueurs B H et H C) ; en d'autres termes (voir n° 14), on a

$$\overline{AH}^2 = BH \times HC$$

Le côté A B du triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse B C et le segment B H

de cette hypoténuse. De même A C est moyenne proportionnelle entre B C et H C. En d'autres termes :

$$\overline{AB}^2 = BC \times BH$$

$$\overline{AC}^2 = BC \times HC$$

D'après la remarque que nous avons faite au n° 14, ces deux relations sont exactement équivalentes à des égalités numériques ordinaires. On peut les *additionner.* L'addition montre que la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ est égale au produit de la longueur B C par sa somme B H + H C. elle-même égale à B C. Donc la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ égale le produit de B C par B C, c'est-à-dire $\overline{BC}^2$: *Le carré de l'hypoténuse du triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Cette fameuse proposition, connue sous le nom de théorème de Pythagore, nous apparaît ainsi comme une conséquence de la théorie des proportions. On peut la présenter autrement en se plaçant au point de vue du n° 12. Le carré d'une longueur, en effet, c'est, nous l'avons vu, la grandeur superficielle du carré construit sur cette longueur (ayant cette longueur pour côté). Le théorème de Pythagore exprime donc le fait que sur la figure 18 la superficie du carré 1 est égale à la somme des superficies des carrés 2 et 3.

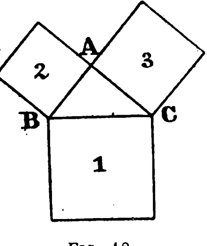


FIG. 18

Une autre propriété quantitative remarquable, qui se rencontre, celle-là, dans un triangle *quelconque* (non nécessairement rectangle) est la propriété suivante : Soit A B C un triangle, A D la *bissectrice* de l'angle A, qui détermine sur le côté B C deux « segments » B D et D C. Il se trouve que *ces segments sont proportionnels aux côtés A B et A C du triangle.* En d'autres termes, on a la proportion

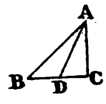


FIG. 19

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE. — FIGURES INVERSES.

22. Soit un cercle de centre O et un point P non situé sur la circonférence du cercle (supposons-le hors du cercle, par exemple). Par le point P menons des droites *quelconques* qui coupent la circonférence en des points tels que A et B ou C et D (fig. 20). Ces droites sont appelées des sécantes. Elles jouissent de cette propriété que l'on a

$$PC \times PD = PA \times PB$$

et cela *quelles que soient* les sécantes que l'on considère. En d'autres termes, le produit de deux longueurs, $PC \times PD$, a une valeur qui ne change pas lorsque (le cercle et le point P restant fixes) la sécante P C D tourne autour du point P. Cette valeur (entièrement déterminée dès que l'on connaît le cercle et la position du point P)

est appelée « *puissance du point P par rapport au cercle* ». — Lorsque, en tournant autour du point P, la sécante devient tangente au cercle, les points C et D viennent en coïncidence et se confondent alors tous les deux avec le point de contact T de la tangente. D'après la propriété énoncée ci-dessus, on aura donc :

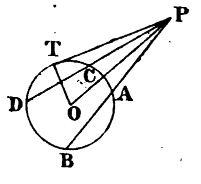


FIG. 20

$$\overline{PT}^2 = PA \times PB,$$

ce qui montre que la puissance du point P est égale à $\overline{PT}^2$. Mais joignons O et T. Le triangle TOP est rectangle en T (n° 20). Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\overline{PT}^2 + \overline{OT}^2 = \overline{OP}^2$$

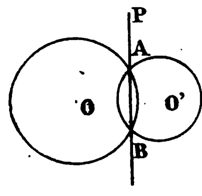


FIG. 21

ce qui signifie (*) : *le carré de la puissance du point P, plus le carré du rayon du cercle, égale le carré de la distance du point P au centre du cercle.*

Soient maintenant deux cercles de centre O et O′ qui se coupent en deux points A et B (fig. 21). Menons la droite qui passe par A et B et prenons un point

(*) Cette dernière propriété ne se présente sous cette forme que si le point P est hors du cercle. Au contraire, la propriété qui caractérise la « puissance » vaut pour toute position du point P hors du centre ou à l'intérieur.

quelconque P sur cette droite. D'après la définition de la puissance, le point P a par rapport au cercle O une puissance égale à $PA \times PB$ et par rapport au cercle O′ une puissance aussi égale à $PA \times PB$. Donc il a *même puissance* par rapport aux deux cercles. Mais, le point P est *quelconque* sur la droite A B ou ses prolongements. Donc la droite dans son ensemble jouit de cette propriété que chacun de ses points a même puissance par rapport aux deux cercles. On l'appelle *axe radical* des deux cercles, et l'on dit qu'elle est le « *lieu géométrique* des points qui ont même puissance par rapport aux deux cercles ».

Voici encore une propriété quantitative du cercle qui définit un « lieu géométrique » remarquable : Considérons un cercle dont A D soit un diamètre. Joignons A à un point B quelconque du cercle, et sur A B prolongé, prenons une longueur A B′ telle que $AB \times AB' = \overline{AD}^2$. Nous constatons que *le point B′ se trouve sur la droite perpendiculaire à A D menée par D.* Répétant la même construction pour diverses positions de B sur le cercle (fig. 22), nous obtenons toujours un point B′ situé sur la *même* droite perpendiculaire à A D. Cette droite, indéfiniment prolongée dans les deux sens, est dite *figure inverse* du cercle. Elle est, dit-on, aussi le « lieu géométrique » des points B′ jouissant de la propriété que, si l'on appelle B le point où la droite A B′ coupe le cercle, on ait l'égalité $AB \times AB' = \overline{AD}^2$.

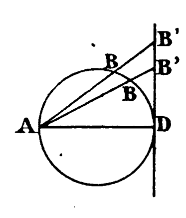


FIG. 22

YGONES RÉGULIERS

23. On appelle polygone *régulier* un polygone (voir n° 15) dont tous les angles sont égaux entre eux et tous les côtés égaux entre eux. Les plus simples des polygones réguliers sont le *triangle équilatéral* (triangle dont les trois côtés sont égaux), le *carré* (quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux et dont les quatre angles sont droits), puis le *pentagone régulier* (à 5 côtés), l'*hexagone* (à 6 côtés), etc...

Dans tout cercle on peut *inscrire* des polygones réguliers d'un nombre arbitraire de côtés. Je veux dire qu'on peut construire des triangles équilatéraux, des carrés, etc., ayant tous leurs sommets sur la circonférence du cercle. D'ailleurs les polygones réguliers d'un même nombre de côtés inscrits dans un même cercle ont tous des côtés de même longueur, et cette longueur est liée à celle du rayon du cercle par une relation remarquable.

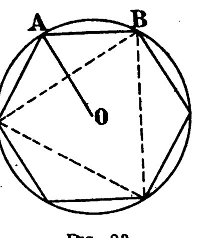


FIG. 23

C'est ainsi que si R est le nombre qui mesure le rayon du cercle, le triangle équilatéral inscrit aura un côté mesurant $\frac{R.\sqrt{3}}{2}$; le carré inscrit aura un côté mesurant $\frac{R.\sqrt{2}}{2}$; l'hexagone régulier inscrit aura un côté égal au rayon du cercle (la fig. 23 représente en pointillé un triangle équilatéral inscrit et en traits pleins un hexagone régulier inscrit, dont un côté quelconque, A B, est égal au rayon O A).

FIGURES A TROIS DIMENSIONS. — POLYÈDRES RÉGULIERS. — CONE.

24. Toutes les figures que nous avons considérées dans les pages qui précèdent sont des figures tracées sur un plan, des *figures planes*. Les figures à trois dimensions sont un peu plus difficiles à étudier et surtout à représenter (parce qu'il est est impossible d'en dessiner l'image exacte sur un tableau noir ou une feuille de papier; il faut se contenter d'en tracer des projections, des coupes, ou des représentations conventionnelles faites selon certains modes de perspective). Elles jouissent néanmoins de propriétés nombreuses et remarquables. Ces propriétés, on les trouvera exposées en détail dans tous les traités de géométrie. Je les passe ici sous silence, car les exemples tirés de la géométrie plane suffisent sans doute à nous donner une idée du point de vue auquel se placent les géomètres et des fruits qu'ils ont récoltés. J'indique toutefois que, d'après Platon, c'est dans la géométrie à trois dimensions (appelée *stéréométrie*) que se rencontrent les figures les plus parfaites, les plus riches en propriétés harmonieuses : ce sont la *sphère* d'abord, les *polyèdres réguliers* ensuite, c'est-à-dire les figures limitées par des droites et des plans dont toutes les *faces* sont des polygones réguliers symétriquement disposés. Il y a exactement cinq polyèdres réguliers. Les plus simples sont le *cube* et le *tétraèdre* (ou pyramide formée de quatre faces qui sont des triangles équilatéraux égaux). Viennent ensuite l'*octaèdre* (figure à huit faces égales qui sont des triangles équilatéraux), le *dodécaèdre* (figure à 12 faces égales qui sont des triangles équilatéraux), l'*icosaèdre* (figure à 20 faces égales qui sont des triangles équilatéraux).

Bien d'autres figures à trois dimensions sont dignes d'être étudiées, par exemple le *tore* (figure en forme de couronne), le *cylindre*, le *cône*. Cette dernière figure est obtenue, comme on sait, en considérant un cercle (cercle de base), ainsi qu'un point S (sommet du cône), hors du plan du centre de base, et en traçant l'ensemble des droites qui vont du sommet S aux points A, B, C, etc., de la circonférence du cercle (fig. 24). L'ensemble des droites ainsi définies forme une couche superficielle en forme de cornet que l'on appelle la surface du cône.

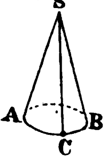


FIG. 24

[SEC]TIONS [CO]NIQUES

25. Lorsque l'on coupe un cône par un plan, l'*intersection* du plan et de la surface du cône est une courbe plane qui, évidemment, doit jouir de propriétés particulières. Effectivement, cette courbe appartient à une famille de figures qui, avec certaines variantes, présente des caractères spécifiques particulièrement saisissants : la famille des *sections coniques*.

Considérons, dans un plan, un point fixe F, appelé *foyer*, et une droite fixe D′ D, appelée *directrice* (fig. 25). Puis envisageons un point M variable dans le plan et prenons sa distance au point F (longueur M F) et sa distance à la droite D′ D (longueur M H comptée sur la [pe]rpendiculaire abaissée de M sur D′ D). Le rap[p]ort $\frac{MF}{MH}$ a une valeur qui naturellement varie avec

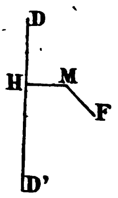


FIG. 25

la position de M. Mais, parmi toutes les positions de M dans le plan, envisageons *celles pour lesquelles le rapport* $\frac{MF}{MH}$ *a une même valeur donnée.* L'ensemble des valeurs de M ainsi définies constitue ce que l'on appelle un « lieu géométrique » de points jouissant d'une propriété commune (comparer n° 22). C'est une *courbe* d'un certain type.

Or, on constate que, suivant que la valeur fixe assignée au rapport $\frac{MF}{MH}$ est plus petite que 1 (ce qui veut dire que M F est plus petit que M H), plus grande que

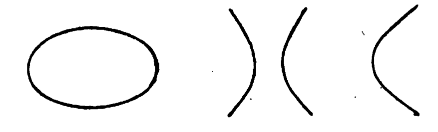


Fig. 26

1, ou égale à 1, la courbe considérée a l'une des trois formes représentées par la figure 26. Dans le premier cas, la courbe est dite *ellipse*, dans le second cas *hyperbole*, dans le troisième cas *parabole*.

Et il se trouve que précisément l'intersection d'un cône et d'un plan pourra être (suivant la disposition du plan par rapport au cône) l'une ou l'autre de ces trois courbes et sera toujours l'une de ces courbes (*). C'est pourquoi celles-ci — qu'elles soient ellipses, hyperboles ou paraboles — sont appelées « *sections coniques* ».

(*) Exceptionnellement, la courbe pourra dégénérer en *une droite* ou en *deux droites*.

26. Rappelons brièvement quelques-unes des propriétés de ces courbes remarquables.

Nous avons donné ci-dessus une définition de l'ellipse où intervient un point appelé foyer et une directrice. Or, il se trouve que l'ellipse a *deux* foyers. En d'autres termes, la même ellipse, que nous avons définie en considérant le point F et la droite D′ D, peut être définie de la même manière en partant d'un autre foyer F′ et d'une autre directrice. Et, si l'on considère les deux foyers simultanément, on reconnaît le fait suivant : *Quel que soit le point* M *sur l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers, c'est-à-dire la somme* M F + M F′ *a toujours la même valeur* (la même longueur). — Cette propriété est caractéristique de l'ellipse. Ainsi l'ellipse peut être considérée comme la courbe formée par les points (le « lieu géométrique » des points) tels que *la somme de leurs distances à deux points fixes du plan,* F et F′ *soit égale à une même longueur donnée.*

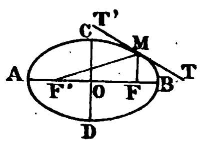


FIG. 27

Prolongeons la droite FF′ jusqu'à ses points de rencontre en A et B avec l'ellipse. Elevons d'autre part, au milieu O de FF′, la perpendiculaire à AB, qui coupe l'ellipse en C et D. La figure de l'ellipse se trouve être *symétriquement disposée* par rapport aux deux droites AB et CD, fait qu'on exprime en disant que AB et CD sont des *axes de symétrie* de l'ellipse; AB (qui passe par les foyers) est le *grand axe;* BC est le *petit axe.*

Considérons, d'autre part, la *tangente* à l'ellipse au point M (droite TT′ qui touche l'ellipse au seul point M).

Cette tangente (fig. 27) jouit notamment de la propriété suivante : *Les angles* FMT *et* F'MT' (angles qu'elle forme avec les droites joignant le point M aux deux foyers) *sont deux angles égaux.*

Signalons encore, à propos de l'ellipse, la propriété suivante découverte par Pascal : Si un hexagone est inscrit dans une ellipse (c'est-à-dire a ses 6 sommets sur l'ellipse) et si l'on prolonge chaque côté de l'hexagone jusqu'à sa rencontre avec le côté opposé (*), les 3 points de rencontre des 3 couples de côtés opposés de l'hexagone sont toujours situés sur une même ligne droite.

Nous avons dit que l'ellipse a deux foyers. Pour certaines ellipses, cependant, ces foyers peuvent être très près l'un de l'autre, et il peut même arriver qu'ils coïncident. Ils coïncident alors aussi avec le point O (milieu de FF') et l'ellipse devient un *cercle* de centre O; en ce cas, en effet, la somme des longueurs MF + MF' devient 2 MO, et la propriété dont jouit cette somme exprime simplement que pour tout point M de la courbe, le double de la distance au centre O (donc cette distance elle-même) a une même valeur. Il suit de là que les *cercles* sont des *ellipses* d'un type particulier (**).

(*) Parcourant le contour de l'hexagone à partir d'un premier côté, numérotons les côtés de 1 à 6 dans l'ordre où nous les rencontrons. Nous appellerons côtés opposés de l'hexagone les côtés marqués 1 et 4, ou 2 et 5, ou 3 et 6.

(**) Si l'on définit l'ellipse au moyen du foyer F et de la directrice D'D comme nous l'avons fait plus haut, on constate que, plus la directrice s'éloigne du foyer, plus l'ellipse se rapproche d'un cercle (le rapport $\frac{MF}{MH}$ devenant d'ailleurs de plus en plus petit). Pour que l'ellipse ainsi définie devînt un cercle, il faudrait donc que la directrice s'éloignât jusqu'à distance infinie.

La courbe que nous avons appelée *hyperbole* jouit de propriétés analogues à celles de l'ellipse, quoiqu'un peu différentes. L'hyperbole a, comme l'ellipse, deux foyers. Mais ici c'est la différence (et non plus la somme) des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers qui conserve toujours la même valeur.

La *parabole*, par contre, n'a qu'un foyer. Pour cette courbe, on le remarquera, la propriété du foyer et de la directrice énoncée plus haut devient particulièrement simple : Pour tout point M de la parabole, *la distance* MF *au foyer et la distance* MH *à la directrice* (fig. 25) *se trouvent être des longueurs égales.*

COURBES DIVERSES. — CYCLOÏDE.

27. Les sections coniques jouissent encore d'un grand nombre d'autres propriétés, qu'il serait trop long d'énumérer. Aussi ces courbes ont-elles pendant longtemps suffi à contenter la curiosité des géomètres. Les écoles du monde grec ont concentré sur elles toute leur attention et elles n'ont qu'exceptionnellement considéré quelques autres courbes, comme la *conchoïde* et la *cissoïde*, dont tous les traités de géométrie nous donnent la définition.

A partir du XVIIe siècle, cependant, les géomètres ont imaginé de nouvelles méthodes qui leur ont permis d'étudier une immense variété de courbes inédites. Je dois au moins une mention à celle de ces courbes qui entre 1650 et 1700 a fait le plus de bruit : la *roulette* ou *cycloïde*.

Considérons un point M fixé à une circonférence. Lorsque la circonférence *roule* sur une droite, le point M décrit une courbe, qui est composée d'une série de demi-

boucles toutes égales entre elles (fig. 28), et qui est appelée roulette ou *cycloïde* [ainsi, un clou fixé sur la circonférence d'une roue de voiture décrit une cycloïde lorsque la roue roule sur une route plane; supposons qu'au commencement du mouvement le clou soit à terre en A; il s'élève à partir de A, puis s'abaisse, en B lorsque la roue a décrit un tour complet; et ainsi de suite]. La cycloïde a de nombreuses propriétés concernant notamment sa longueur, sa tangente, et les figures que l'on peut engendrer en la faisant tourner autour de l'*axe* ABC ou en effectuant d'autres opérations. Voici, à titre d'exemple, la propriété qui caractérise la longueur de la courbe, prise de A à B (*longueur de la demi-boucle de cycloïde*) : *cette longueur est égale à huit fois le rayon du cercle roulant qui la définit.*

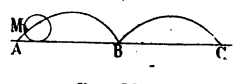


FIG. 28

CHAPITRE III

La démonstration mathématique.

28. J'ai cherché à faire comprendre, ou du moins à faire deviner, quel est le genre de vérités que prise le mathématicien, quelles sont les choses qu'il cherche à découvrir lorsqu'il explore le monde des nombres ou celui des figures. Mais ces vérités — si précieuses pour l'humanité parce qu'elles sont éternellement vraies — comment les obtient-on, comment les découvre-t-on, comment s'assure-t-on qu'elles sont bien telles que nous les supposons ?

Sans doute, toute assertion relative aux nombres ou aux figures peut toujours, et très facilement, être soumise soit à l'épreuve du calcul, soit à l'épreuve du dessin. Si je dis que la somme des n premiers nombres entiers est égale à la moitié du produit du nombre n par le nombre $n + 1$, je puis immédiatement vérifier mon dire pour telles valeurs de n qu'il me plaira. Un calcul immédiat me montre en effet que la somme des 5 premiers nombres est bien égale à la moitié de 5×6, c'est-à-dire 15, que la somme des 7 premiers nombres est bien égale à la moitié de 7×8, ou 28, que la somme

des 10 premiers nombres est bien égale à la moitié de 10×11 ; et ainsi de suite. Si je dis, d'autre part, que les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point, je puis encore vérifier cette assertion en dessinant avec une règle un triangle quelconque, en en construisant (*) les hauteurs et en constatant ainsi que les trois hauteurs concourent bien en un même point. Si je dis qu'un cône est coupé par un plan suivant une ellipse, une hyperbole ou une parabole, j'énonce un fait un peu plus difficile à contrôler que les précédents, parce qu'il se rapporte à une figure à trois dimensions. Mais je puis encore néanmoins justifier mon affirmation en dessinant des projections ou des coupes de ma figure à trois dimensions. S'il me plaît, d'ailleurs, je puis également procéder à une vérification directe : je prendrai un cône matériel (tel qu'un pain de sucre) et, le fendant avec un couteau, je constaterai que la fente a pour figure l'une des courbes appelées « sections coniques ». De semblables vérifications sont toujours réalisables. Mais l'on voit immédiatement pourquoi elles n'ont pas suffisamment de force pour fonder, d'une manière solide et définitive, les vérités des mathématiques.

Et d'abord, pour ce qui est du dessin, il n'a jamais une exactitude rigoureuse; il n'est qu'approximatif; il ne saurait donc prouver que les vérités énoncées sont absolument vraies, mais seulement qu'elles sont à peu près vraies. Et, lorsqu'il s'agira de propriétés très complexes, dont le dessin concret ne saurait donner

(*) Avec une équerre ou, d'une façon plus précise, à l'aide du compas et de la règle, en appliquant des procédés bien connus des arpenteurs.

qu'une idée grossière, qui peut prévoir jusqu'où nous risquerons de descendre dans l' « à peu près » ?

Mais il y a plus. Supposons que nous réussissions à faire des dessins rigoureusement parfaits. Il restera que les figures dessinées par nous sont toujours des figures individuelles; bien qu'elles appartiennent à un type théorique *général* (celui dont nous étudions les propriétés) — par exemple, le type *triangle*, ou *hexagone*, ou *ellipse* —, ces figures ont néanmoins forcément une orientation, des proportions et diverses particularités qui leur sont spéciales. Comment, dès lors, pouvons-nous être sûrs que la propriété dont nous constatons la présence dans une figure déterminée ne tient pas justement aux particularités de celle-ci et qu'elle se retrouvera toute pareille dans les autres spécimens du type général ? Là est l'objection fondamentale à laquelle sont exposés tous nos procédés de vérification, ceux qui reposent sur le calcul comme ceux qui reposent sur le dessin. Ainsi pour reprendre l'exemple que nous présentions tout à l'heure, il nous est facile, sans doute, de vérifier la propriété de la somme des n premiers nombres pour $n = 5$, pour $n = 7$, pour $n = 10$ et pour autant de valeurs spéciales de n que nous le désirerons. Mais de quel droit affirmons-nous d'avance que la propriété est encore vraie pour toutes les *autres valeurs* de n — valeurs en nombre infini, qu'il nous est matériellement impossible de mettre toutes à l'épreuve les unes après les autres ?

29. Ces remarques étaient familières aux philosophes grecs, et ils en avaient conclu que les vérités mathématiques sont étrangères au domaine de la connaissance

sensible; elles se trouvent sur un plan plus élevé; elles appartiennent à un monde sur lequel les sens n'ont pas de prise et où seule pénètre l'intelligence; c'est par une sorte de vision de l'esprit, — d'*intuition*, disaient les Grecs —, et non par les yeux du corps, que nous pouvons les apercevoir et ensuite nous en rendre maîtres.

Si cette faculté d'intuition, dont nous parlent les Grecs, existe réellement — et il semble que sans elle les caractères distinctifs de la pensée mathématique seraient inexplicables — il faut admettre, n'est-il pas vrai, qu'elle n'est pas le privilège de quelques-uns et que tous les hommes peuvent à tout instant en faire usage. En fait, cependant, il n'est pas douteux que l'intuition se manifeste en nous avec une intensité plus ou moins grande et d'une manière très intermittente. N'en profite que qui sait s'en servir. Comment donc devrons-nous nous y prendre pour la mettre à même de s'exercer et comment la stimulerons-nous afin de lui faire fournir tout ce qu'elle peut donner ? L'intuition mathématique, d'autre part, est plus ou moins pure. Soit que l'intelligence ne s'affranchisse pas suffisamment de l'influence des sens et des illusions où ils nous font tomber, soit que son mécanisme ne fonctionne pas d'une manière parfaite, il lui arrive de ne pas voir juste du premier coup. Comment donc nous assurerons-nous que notre intuition ne s'est pas trompée et que telle vérité, que nous pensons apercevoir, est bien en effet une vérité?

En d'autres termes, pour faire œuvre de mathématicien, l'intuition pure et simple ne nous suffit pas. Il faut que nous ayons un moyen de la faire travailler et aussi un moyen de la contrôler.

A vrai dire la préoccupation que nous laissons voir ici n'a peut-être pas existé au même degré à toutes les époques. Les premiers Pythagoriciens considéraient, semble-t-il, les vérités mathématiques comme autant de trésors secrets qu'il ne fallait pas profaner en donnant au premier venu le moyen de les acquérir. Aussi ne se souciaient-ils pas de codifier et de formuler les méthodes qui permettent à tout homme sensé d'atteindre les propriétés des nombres et celles des figures. L'important pour eux était de *savoir* que ces propriétés *existent*. Or cela ils le savaient avant même peut-être de l'avoir établi par un raisonnement absolument probant. Il est des cas, en effet, où la conviction morale qu'à défaut de preuve formelle nous pouvons avoir d'une vérité a, par suite des circonstances, la valeur d'une certitude. Et en ce cas cette conviction — bien qu'inexistante pour un esprit critique et sceptique — suffit cependant à enthousiasmer le véritable savant, celui qui a un sens aigu de la vérité spéculative.

Cependant l'attitude adoptée par les premiers Pythagoriciens n'a point été longtemps en faveur dans le monde savant. Elle disparut rapidement, et en Grèce même, pour faire place à une disposition toute différente. En effet, le génie grec était complexe et varié. Dans ce même pays où l'on sentait si profondément la beauté intrinsèque des choses mathématiques et la joie que l'intelligence trouve dans leur possession quel que soit le chemin par où elle s'y est élevée, dans ce même pays, on avait aussi au plus haut degré le goût de la logique et de la dialectique; on y était très sensible au plaisir que procure à l'homme la poursuite et la conquête même de la vérité. En tout bon Grec, ne l'oublions pas, il y a un rai-

sonneur, un sophiste au vrai sens du mot, et la science mathématique, fruit de la pensée grecque, a profité de ce trait national. Bien vite, en effet, les auteurs de cette science ont reconnu que les propriétés mathématiques peuvent être établies — *prouvées* — d'une manière rigoureuse et systématique, par l'emploi de certains procédés généraux que la logique détermine. Et, dès lors, ils ont posé d'une main ferme et sûre les « règles de la démonstration mathématique ».

30. Convient-il d'insister ici sur ces règles et sur l'appareil logique de la démonstration? Je crois bien que non; car c'est là probablement ce que connaissent le mieux, — ce que ne connaissent que trop peut-être — la plupart des hommes et des femmes à qui l'on a enseigné les rudiments des mathématiques. A notre époque, le nom seul de mathématicien évoque aussitôt dans les esprits l'idée de raisonnement en forme, d'axiomes énoncés sur un ton tranchant, de syllogismes pesants et de calculs rébarbatifs indéfiniment alignés. C'est à ces signes que l'homme du monde croît reconnaître l'esprit géométrique, auquel, pour avoir lu Pascal sans le comprendre, il oppose naturellement l'esprit de finesse, c'est-à-dire son propre esprit. Quelle erreur, quel aveuglement, soit dit en passant. Non, la logique n'est point l'objet principal de l'activité du mathématicien. Elle est seulement l'instrument dont il se sert pour s'assurer la pleine possession de ses trésors. La logique joue dans la science le même rôle exactement que dans la vie. Mais, ayant affaire à une matière particulièrement subtile, le savant doit employer les formes de raisonnements les plus affi-

nées, alors que l'homme du monde se contente ordinairement des plus grossières. Dans la logique de la vie courante, n'est-il pas constant que, si un homme est dans l'erreur, son contradicteur doit avoir raison, que si une cause est multipliée par deux il en est de même de l'effet, que les conditions variables des phénomènes évoluent toujours dans le même sens à moins qu'elles ne soient au contraire continuellement oscillantes? Autant de fautes de raisonnement que le mathématicien lui aussi a commises naguère, pour son propre compte, mais dont il a su depuis longtemps se mettre à l'abri en perfectionnant son outil logique et en s'imposant des règles de déduction extrêmement sévères et minutieuses.

31. Le modèle auquel se conforment les mathématiciens pour bâtir leurs démonstrations a été, comme je le disais plus haut, fixé par les Grecs. Il apparaît dans toute sa pureté chez Euclide. C'est en appliquant les principes du vieux maître alexandrin que l'on a édifié un vaste système mathématique auquel il était lui-même, bien loin de songer.

La méthode consiste à prendre un point de départ rigoureusement déterminé : *définitions*, d'une part; *postulats* et *axiomes*, d'autre part, — ces derniers complétant les définitions, soit en en affirmant la légitimité ou en en précisant le contenu, soit en énonçant certaines propriétés primordiales qui caractérisent les notions auxquelles se rapportent les définitions. De ce point de départ tout le reste doit être déduit par un processus logique au moyen de certaines méthodes que les Grecs ont soigneusement analysées : méthode de la *démonstration syn-*

thétique, méthode de la *démonstration analytique* (on la reconnaît à ce trait, dans les cours élémentaires de mathématiques qu'elle débute en « supposant le problème résolu »), méthode de la *démonstration par l'absurde*, etc., etc. Les résultats auxquels conduisent toutes ces démonstrations sont ensuite ordonnés et classés sous forme de *lemmes* (ou propositions préparatoires), de *théorèmes* (propositions principales), de *corollaires* (propositions accessoires, conséquences des théorèmes), et ainsi de suite.

32. Comme exemple de démonstration faite suivant les règles, je citerai la démonstration du théorème énoncé plus haut au n° 18 : « *La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits* ».

On a défini, au début de la géométrie, l'angle droit, moitié du plus grand angle possible dont les deux côtés sont en prolongement l'un de l'autre (n° 11). De là résulte que l'angle dont les côtés sont sur une même droite, comme l'angle B A D de la figure 12 a pour valeur *deux angles droits*. On a défini, d'autre part, avant toute démonstration, les droites parallèles, et l'on a posé ce postulat : « Par un point pris hors d'une droite on peut mener une et une seule parallèle à cette droite ». Partant de là et des autres définitions et axiomes, on a pu « démontrer » les théorèmes qui font l'objet de notre n° 17 et qui ont trait à l'égalité des angles alternes-internes, correspondants, etc., formés par des droites parallèles.

Une fois parvenus à ce point, nous pouvons donner une démonstration logique rigoureuse du théorème du n° 18 Par le point A, dirons-nous, nous menons la paral-

lèle A E à la droite B C (cela est possible d'après l'axiome énoncé ci-dessus). Alors, d'après le théorème sur les angles alternes-internes, les angles marqués 2 et 4 sur la figure 12 se trouvent égaux. De même, d'après le théorème sur les angles correspondants, les angles marqués 3 et 5 sont égaux entre eux. Il suit de là que la somme des trois angles 1, 2, 3 est égale à la somme des trois angles 1, 4, 5. Mais cette dernière somme n'est autre que l'angle B A D dont les deux côtés sont en ligne droite. Donc elle vaut deux angles droits. C. Q. F. D. (*Ce qu'il fallait démontrer*).

33. Donnons encore un autre exemple de démonstration en prouvant que *la somme des* n *premiers nombres entiers est égale à la moitié du produit de* n *par* n + 1 (n° 2). — Ecrivons sur une ligne, les uns à côté des autres, les n premiers nombres à partir de 1, et écrivons au-dessous les mêmes nombres pris dans l'ordre inverse à partir de n (les nombres non explicitement écrits seront remplacés par des points) :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots\ldots & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Cela fait, additionnons chaque nombre de la première ligne avec le nombre situé au-dessous. Nous obtenons $1 + n$, puis $2 + n - 1$, c'est-à-dire $1 + n$, puis $3 + n - 2$, c'est-à-dire encore $1 + n$, etc.; on voit que quand nous passons d'une addition à la suivante, le nombre que nous prenons sur la première ligne *augmente*

d'une unité, le nombre situé au-dessous *diminue* d'une unité, donc le résultat de l'addition ne change pas et donne *toujours* $1 + n$.

Mais il y a n nombres sur notre ligne. Donc nous avons à faire n additions qui toutes donnent pour somme $1 + n$. Et, par suite, la somme totale de toutes les sommes partielles ainsi formées est *n fois le nombre* $1 + n$, ou « *n multiplié* par $n + 1$ ». Mais qu'est-ce que cette somme totale ? C'est une somme qui comprend tous les nombres de la première ligne (chacun une fois) et, en outre, tous les nombres de la seconde ligne. Or chacune de nos lignes contient les n premiers nombres. Donc notre somme totale, c'est *deux fois la somme* des n premiers nombres. J'en conclus que : *deux fois la somme des* n *premiers nombres = produit de* n *par* n + 1, ou encore : *somme des* n *premiers nombres = moitié du produit de* n *par* n + 1. C. Q. F. D. (*Ce qu'il fallait démontrer*).

Tel est le raisonnement que l'on trouve dans la plupart des cours d'arithmétique et dont j'ai volontairement allongé l'exposé afin d'en bien dégager toutes les parties et tous les détails. C'est par des raisonnements semblables, mais de plus en plus complexes, que toutes les propriétés mathématiques — celles dont il a été question dans nos deux premiers chapitres comme celles que l'on rencontrera dans la science la plus avancée — doivent être justifiées et « démontrées ».

34. Les règles de la démonstration, on le voit, sont aisées à définir. Ce qui est difficile, c'est de les appliquer, et surtout d'en tirer des propriétés vraiment belles et

dignes d'attention. Une autre difficulté provient du fait suivant. Nous avons dit que, pour construire logiquement les mathématiques, il faut se donner d'abord un point de départ (définitions, axiomes, et postulats). Or comment saurons-nous si le point de départ que nous adoptons est bien le meilleur qu'on puisse prendre, et comment même pourrons-nous être sûrs qu'il est bien correct, qu'il est légitime ?

Une première réponse nous vient tout d'abord à l'esprit. La logique est, en mathématiques, l'auxiliaire de l'intuition. Or, s'il est vrai que l'intuition est exposée à se tromper lorsqu'elle s'exerce sur des données complexes, ne doit-on pas la tenir pour infaillible tant qu'elle se borne aux notions élémentaires ? Ainsi, pour obtenir ses définitions et ses axiomes, le logicien, en somme, n'aurait qu'à écrire sous la dictée ce que l'intuition lui fera connaître. Ce n'est que sur les propriétés d'un caractère moins immédiat que nous lui demanderions d'exercer un contrôle.

A la réflexion, cependant, cette vue trop paresseuse ne saurait nous satisfaire. Une longue expérience nous a rendus méfiants et nous voudrions construire une science dont la base même ait une certitude, une justification logique. Or, de ce point de vue, la géométrie d'Euclide elle-même — ce modèle admirable — laisse fort à désirer. Sans doute peut-on dire que le point de départ d'Euclide se trouve légitimé par le fait que le géomètre en a tiré un système impeccable et qu'aussi loin que l'on pousse les conséquences logiques de ses prémisses on n'y découvre jamais aucune contradiction, aucun défaut d'aucune sorte. Mais, répondront les dialecticiens intransigeants, la

science, ni aucune de ses parties, ne sera jamais close, et de ce que la géométrie euclidienne est jusqu'ici inattaquable on ne saurait conclure en toute rigueur que, si nous en poursuivons le développement, nous ne tomberons par un jour dans des contradictions qui nous forceront à en modifier certains fondements.

Pour construire une science vraiment inébranlable, il est nécessaire de soumettre les axiomes qui lui servent de base à une série d'épreuves logiques extrêmement délicates (pour simplifier nous pouvons appeler d'un nom unique, « axiomes », toutes les données initiales posées ou postulées par les mathématiciens; car ces données s'expriment toutes par des propositions logiques qui, du point de vue formel, sont de même espèce).

En premier lieu, le mathématicien doit s'assurer que les axiomes dont il part pour construire une théorie sont des axiomes *compatibles*. J'entends par là des axiomes qui ne se contredisent pas les uns les autres et tels qu'on puisse affirmer à l'avance que toutes les propositions obtenues en les combinant seront elles aussi exemptes de contradiction. Les axiomes de la géométrie euclidienne sont bien en ce sens (et ceci répond à la question posée il y a un instant), des axiomes compatibles; mais c'est seulement récemment que l'on a pu démontrer qu'ils jouissent de cette propriété.

En second lieu, il convient d'examiner si les axiomes envisagés sont bien *suffisants*, et si leur énoncé est rigoureusement complet. C'est là une condition que les axiomes euclidiens ne remplissent qu'imparfaitement (bien qu'à cet égard Euclide soit beaucoup plus circonspect que la plupart de nos traités élémentaires de géométrie).

En effet, indépendamment des hypothèses qu'ils formulent, les Euclidiens, sans y prendre garde, utilisent parfois dans leurs démonstrations certains principes « évidents » qu'ils négligent d'énoncer explicitement. Il y a là une faute qu'il importe de corriger. Toutes les vérités qui ne sont pas des conséquences logiques des axiomes doivent sans exception être elles-mêmes comptées comme des axiomes; et toutes les assertions que l'on entend impliquer dans un axiome doivent apparaître tout au long dans nos énoncés. C'est ainsi que le professeur Hilbert distingue comme autant d'axiomes indispensables de la géométrie toute une série de faits que l'on croyait naguère pouvoir sous-entendre : ceux-ci, par exemple : « Soient A, B, C, trois points d'une même droite; si le point B est entre A et C, le point B sera aussi entre C et A »; « De trois points quelconques d'une droite, il y en a toujours un et un seul qui est entre les deux autres », etc.

En troisième lieu, notre système initial d'axiomes ne devra être regardé comme bien choisi que s'il ne comprend pas d'axiome superflu (axiome dont la vérité résulte de celle des autres axiomes), et s'il ne peut pas être remplacé par un autre système d'axiomes strictement équivalent et pourtant plus simple; dans ce dernier cas en effet, nous devrions, à vertu égale, préférer les axiomes qui sont les plus simples.

En quatrième lieu, enfin, il conviendra de rechercher si les axiomes soumis à examen forment ou non — logiquement parlant — un bloc indissoluble. En d'autres termes, il faudra voir si l'on peut, sans absurdité, et sans retirer tout sens aux axiomes maintenus, *supprimer* quelques-uns des axiomes et au besoin les remplacer par d'au-

tres. Sans doute, à supposer que l'on modifie de la sorte le système des axiomes considérés, tout le système des conséquences de ces axiomes se trouvera par là même transformé. On obtiendra, en conséquence, un chapitre de science nouveau, où des propositions qui naguère étaient fausses seront devenues des vérités. Mais qu'importe, si le nouveau système est bien cohérent et s'il est exempt de tout défaut logique? Ne doit-on pas en ce cas le considérer comme « tout aussi vrai » que le système auquel, par routine peut-être, nous nous étions attachés primitivement?

35. Le cas que nous imaginons ici s'est présenté, comme on sait, à propos du fameux « postulat des parallèles ». Euclide avait affirmé, à titre de postulat, que, *par* (*) *un point pris hors d'une droite, on peut mener à celle-ci une parallèle et une seule.* Toutefois, il avait distingué ce postulat des autres parce que la propriété énoncée ne lui paraissait pas être un fait vraiment immédiat, vraiment primordial. La propriété, semblait-il, eût dû être l'objet d'un théorème plutôt que l'objet d'un axiome. D'où un doute, qui porta d'abord les successeurs d'Euclide à se poser la question suivante : Le postulat des parallèles ne serait-il pas un axiome superflu, une proposition qui peut être démontrée à l'aide des vérités premières de la géométrie? Cependant tous les efforts tendant à « démontrer » le fameux postulat restèrent infructueux, et, au début du XIX[e] siècle, la question apparut soudain sous un nouveau jour. Non, le postulat des parallèles n'est pas un

(*) L'énoncé d'Euclide est présenté sous un forme un peu différente mais équivalente.

axiome superflu, mais c'est un axiome qui ne fait pas bloc avec les autres axiomes euclidiens. Si l'on abandonne cet axiome en gardant les autres, on ne ruine nullement ces derniers; mais on obtient un nouveau système de géométrie, fort différent de celui d'Euclide, tout aussi légitime cependant. Un tel système nous est offert par la « géométrie de Lobatschewsky » (dite « géométrie non-euclidienne ») dans laquelle on peut, par tout point, mener *une infinité* de parallèles à une droite quelconque. Une autre géométrie non-euclidienne est celle de *Riemann;* celle-ci jette par-dessus bord non seulement le postulat des parallèles, mais aussi d'autres axiomes traditionnels, car, dans cette géométrie, *les lignes droites ne peuvent avoir une longueur infinie :* d'après elle on ne peut, par un point, *mener à une autre droite aucune parallèle.*

Les personnes étrangères à l'analyse mathématique ont été longtemps intriguées par l'énigme que leur paraissaient poser ces « géométries non-euclidiennes » sorties brusquement du néant. Il n'y a cependant là aucun mystère. Les géométries non-euclidiennes portent sur d'autres faits *mathématiques* que les géométries ordinaires. Et ces faits d'abord nous surprennent un peu parce que nous n'avions pas su les découvrir par intuition directe et parce que nous avons quelque peine à les « imaginer ». Mais il y a bien d'autres théories, dans les mathématiques modernes, qui dépassent notre imagination et où seule l'intuition la plus dégagée des sens est capable de progresser, avec le secours de la logique. Ce qui est particulier aux théories non-euclidiennes, c'est qu'on y emploie dans un sens inusité des mots consacrés par un usage millénaire (droite, cercle, etc.). C'est là une question de vocabulaire.

Peut-être serait-il raisonnable de réserver le nom même de « géométrie » au système euclidien, parce que c'est le système le plus simple, parce que, lors même que nous l'abandonnons, c'est encore à lui que nous nous référons pour interpréter les autres (*). Mais, quelque nom que nous lui donnions, n'oublions pas que la « géométrie non-euclidienne » énonce des faits réels, nullement fantaisistes. Au sens physique du mot c'est même elle, peut-être, qui exprime la réalité la plus vraie, celle qui a une existence concrète; car, selon les vues aujourd'hui fort en vogue d'un grand savant moderne, Albert Einstein, le monde où nous vivons ne serait pas, comme on l'a cru longtemps, un espace géométrique euclidien : ce serait un monde non-euclidien.

(*) Ainsi, pour expliquer ce qui se passe dans ce que la géométrie de Riemann appelle un « plan », on a coutume de comparer ce « plan » à la surface d'une sphère ordinaire. Les « droites » tracées dans le plan de Riemann seront comparables à des arcs de cercles tracés sur la sphère et ayant pour centre le centre de la sphère. De tels arcs ont toujours une longueur finie (si la sphère est elle-même, comme on le suppose, de dimensions finies) et il est clair qu'ils se coupent tous entre eux (il n'y a donc pas de couple d'arcs jouissant de la propriété — que possèdent les parallèles — de ne pas se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge). Les mêmes circonstances se présentent pour les « droites » de la géométrie de Riemann.

CHAPITRE IV

Le calcul algébrique

36. Nous nous sommes demandé dans le chapitre précédent quelles règles il fallait imposer à l'intelligence mathématique pour obtenir une science garantie contre toute erreur, et nous avons reconnu que nous devions combiner la spéculation intuitive avec l'exercice du raisonnement logique. Suffit-il, cependant, de formuler ce précepte pour donner au mathématicien le moyen de réussir dans ses entreprises et de faire d'importantes découvertes? L'expérience montre vite qu'il n'en est rien. Les règles de la démonstration nous apprennent sans doute à faire des raisonnements justes, mais elles ne nous permettent pas de prévoir d'avance quels sont, parmi ces raisonnements, ceux qui conduiront au résultat cherché ou même à un résultat quelconque. Pour faire œuvre d'inventeur, il faut, en mathématiques, de l'habileté, du flair, de la chance aussi, et cela, les procédés euclidiens ne nous le donneront pas. Aussi le progrès des mathématiques reste-t-il, malgré la logique, extrêmement incertain et aléatoire. Il dépend, en définitive, du génie de quelques savants, c'est-à-dire de circonstances fortuites et absolument imprévisibles.

Ainsi devaient en juger les mathématiciens de la grande époque grecque, et sans doute ne s'affligeaient-ils pas outre mesure à l'idée qu'il fallait posséder des dons particuliers pour pouvoir exercer leur art. N'était-ce point là, cependant, une opinion un peu trop hâtive, tenant à l'insuffisance de la science antique? On pouvait se le demander, et il était naturel de chercher à améliorer les conditions du travail mathématique afin d'en accroître le rendement. C'est ce qui fut fait au XVIIe siècle. En complétant la logique euclidienne par l'adjonction d'une nouvelle et puissante méthode — la méthode du calcul algébrique — Descartes et ses contemporains espérèrent obtenir ce qu'Euclide n'avait pas su réaliser : un mécanisme facile, et en quelque sorte automatique, permettant de résoudre tous les problèmes des mathématiques (ou du moins un très grand nombre), sans hésiter sur la marche à suivre et sans avoir constamment à accomplir de nouveaux prodiges d'invention et d'initiative.

Dans quelle mesure les savants du XVIIe siècle ont-ils obtenu ce résultat? Ce chapitre et les suivants nous permettront de nous en faire une idée. On verra que la méthode créée par ces savants s'est, en effet, montrée extraordinairement efficace et qu'elle a complètement changé l'aspect de la science. N'en concluons pas, toutefois, que les anciens étaient dans l'erreur et qu'ils avaient méconnu les véritables caractères de la pensée mathématique. Grâce au calcul algébrique, sans doute, une multitude de problèmes sont ramenés à des problèmes déjà connus, en sorte qu'on peut les résoudre sans nouvel effort d'invention. Mais, à mesure que nous résolvons plus de problèmes, d'autres se posent devant nous, dont

certains sont d'un type entièrement nouveau. Et pour attaquer ces derniers, l'algèbre ne nous suffit plus, un nouveau fil conducteur nous est nécessaire; si bien que nous nous trouvons exactement dans la situation où étaient nos devanciers lorsqu'ils débutaient dans la science. En réalité, les conditions de la découverte mathématique sont restées les mêmes. Le génie y est aussi indispensable que jamais mais aujourd'hui, l'algèbre aidant, un grand nombre de questions fort importantes peuvent être traitées sans son secours.

37. *Qu'est-ce au juste que l'algèbre?* La meilleure définition qu'on en puisse donner est, je crois, celle que j'indiquais il y a un instant : *L'algèbre est un ensemble de procédés qui permettent de résoudre les problèmes par des calculs mécaniques et automatiques.*

Les Grecs connaissaient sans nul doute certaines règles de l'algèbre. Mais nous avons dit déjà qu'entre la théorie et la pratique les Grecs dressaient une barrière infranchissable; et ce caractère machinal qu'ont tendu à prendre en tous temps les calculs pratiques, ils ne se souciaient pas de l'introduire dans la théorie. C'est pourquoi ce fut seulement au XVII[e] siècle que l'algèbre prit la signification et commença à remplir le rôle que nous lui assignons aujourd'hui.

Pour réaliser son dessein, l'algébriste s'efforce d'abord de formuler une fois pour toutes un ensemble de recettes de calcul susceptibles d'être utilisées à première demande dans divers problèmes d'arithmétique. C'est là la première partie de sa tâche. La seconde consiste à déterminer les procédés grâce auxquels on pourra résoudre *par le calcul*

toutes sortes de problèmes variés qui, à première vue, ne relèvent pas de la science des nombres, mais plutôt de la géométrie, de la mécanique, de l'astronomie ou de la physique.

38. Les règles du calcul algébrique, disons-nous, devront s'appliquer, tout d'abord, aux grandeurs arithmétiques, c'est-à-dire aux nombres et aux fractions. Pour abréger le langage, je comprendrai à l'avenir ces dernières sous le nom général de « *nombres* ». Elles seront dites « *nombres fractionnaires* », ce qui les distinguera des « *nombres entiers* ». Allons plus loin tout de suite. Les règles de l'algèbre doivent être également applicables à des grandeurs géométriques, principalement à des *longueurs*, ou plutôt — si nous nous plaçons au point de vue du calculateur — à des « *mesures de longueurs* ». Or les mesures de longueurs s'expriment sans doute communément par des nombres, mais elles ne sont pas toujours des nombres entiers ou fractionnaires au sens spécifié ci-dessus. En effet, on sait qu'il existe des longueurs dont la mesure rigoureuse n'est pas un nombre exact de mètres ou de fractions de mètre. Telle est, par exemple, l'hypoténuse du triangle rectangle dont les autres côtés sont tous deux d'1 *mètre* : cette hypoténuse, qui d'après Pythagore vaut $\sqrt{2}$, ne peut être exprimée par aucune fraction; sans doute peut-on trouver une fraction fournissant une valeur approchée (et même *aussi approchée que l'on voudra*) (*) de $\sqrt{2}$ [la détermination d'une telle fraction

(*) Le sens de cette expression sera expliqué plus en détail à la fin du présent chapitre (voir n° 53).

est l'opération appelée « extraction de la racine carrée de 2 »] ; mais, quelque loin que l'on pousse l'approximation, on n'obtiendra jamais la *valeur exacte* de $\sqrt{2}$, — fait que l'on énonce en disant que $\sqrt{2}$ est une grandeur *incommensurable*. Eh bien : à toutes les grandeurs de cette nature nous voulons que soient applicables les calculs de l'algèbre.

Dans ce but nous préciserons ainsi qu'il suit la définition que nous donnerons en algèbre de la « quantité ». Considérons, à partir d'un point O, sur une demi-droite indéfinie O-X (fig. 29), toutes les longueurs telles que O A, O B. Nous pouvons regarder celles-ci (ou plus exactement leurs « mesures » par rapport à une certaine unité de longueur telle que le mètre) comme constituant des « quantités ». Si la mesure de O A ou O B est un nombre entier ou fractionnaire, nous dirons qu'elle est une « *quantité rationnelle* ». En cas contraire nous dirons qu'elle est « *irrationnelle* ». D'ailleurs, au lieu d'employer ici le mot « quantité », les algébristes ont pris l'habitude de dire plus hardiment « nombres rationnels ou irrationnels ». C'est là un simple artifice de langage, car, au fond, les « nombres irrationnels » diffèrent radicalement de ce que nous avons appelé « nombre » au chapitre premier du présent livre. Cependant la notion mathématique qu'expriment les nouveaux nombres est parfaitement claire et parfaitement précise, puisqu'elle équivaut exactement à celle de longueur d'un *segment* de droite (portion de droite).

A B
O X

FIG. 29

Voilà donc quels sont les objets sur lesquels *tout d'abord* portera l'algèbre. Mais, pour pouvoir être d'un usage général, les règles de l'algèbre ne doivent pas être spéciales à des nombres ou longueurs particulières. Chacune d'elles doit être valable pour *toutes* les quantités rationnelles ou irrationnelles. Aussi les énonce-t-on d'ordinaire en désignant la plupart des quantités qui y figurent par des *lettres de l'alphabet*, lettres que l'on remplacera, dans les applications, par telles valeurs numériques que l'on voudra. Aux lettres de l'algèbre, ou plus exactement aux valeurs qu'elles représentent, on donne fréquemment le nom de « *quantités algébriques* » ou plus simplement de « *quantités* ».

39. Si l'on effectue sur diverses quantités algébriques une série quelconque d'opérations telles qu'additions, soustractions, multiplications, divisions, extractions de racines, on obtient de nouvelles quantités. Celles-ci peuvent être, si l'on veut, figurées par de nouvelles lettres. On peut aussi les représenter par des combinaisons des lettres initiales jointes à certains « signes d'opérations ». Ainsi la somme des deux quantités a et b sera représentée par la combinaison de symboles $a + b$ ou $(a + b)$ entre parenthèses. La somme de a, b et c s'écrira $a + b + c$ ou $(a + b + c)$. La différence de a et b sera $a — b$ ou $(a — b)$. Le produit de a par b s'écrira $a \times b$, ou plus simplement $a . b$ (avec un point entre a et b), ou, plus simplement encore, $a\,b$ (sans signe spécial entre a et b). Le quotient de a par b s'écrit $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ (sous forme de fraction). Le carré de a, ou produit de a par a, se

figure par a^2. Le cube de a, la quatrième puissance de a (voir n° 3) s'écrivent a^3, a^4, etc. La racine carrée de a (nombre dont le carré est égal à a) s'écrit $\sqrt{a}$, et aussi $a^{\frac{1}{2}}$. La racine cubique de a (nombre dont le cube est égal à a) s'écrit $\sqrt[3]{a}$, et aussi $a^{\frac{1}{3}}$, etc. En combinant les règles d'écriture ainsi adoptées, on obtient des « formules » plus compliquées (que l'on appelle « *expressions algébriques* »). Ainsi le carré de a moins le carré de b divisé par la somme des racines carrées de a et de la différence $b - 1$ s'écrira $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b - 1}}$. Le produit de la somme $a + b$ par la différence $a - b$ s'écrira $(a + b) \times (a - b)$, ou simplement $(a + b).(a - b)$. Le produit de a par le carré de b s'écrira $a b^2$, etc.

Quelle est la raison de tous ces symboles et quel usage en fera l'algébriste? Il se propose d'étudier *a priori* les différents types de formules que l'on peut imaginer, et cela en s'attachant, non pas aux valeurs numériques représentées (car ces valeurs varient avec la signification que l'on donne aux lettres, elles sont donc *a priori indéterminées*), mais bien à la *structure*, à la *composition* des formules, c'est-à-dire à leurs propriétés formelles. Ainsi l'algébriste mettra en évidence certaines *équivalences*, certaines *relations* entre formules différentes, relations dont p[illegible]s tard il pourra tirer parti, soit pour simplifier certains c[illegible]culs, soit pour en prévoir à l'avance les résultats, soit p[illegible]ur découvrir les propriétés des nombres ou des autres [illegible]ions mathématiques auxquels se rapportent ces calculs.

FORMULES ET EQUATIONS ALGEBRIQUES.

40. Montrons, par quelques exemples quel genre de *relations* l'algébriste obtient pour commencer (de ces relations il en tirera progressivement de nouvelles, de plus en plus complexes).

Le produit de la somme $(a+b)$ par la différence $(a-b)$ est évidemment égal à *a fois* $(a-b)$, *plus b fois* $(a-b)$; donc il est égal à *a fois a* (ou a^2), *moins a fois b, plus a fois b, moins b fois b* (ou b^2). On voit que *a fois b* (ou ab) est d'abord retranché puis ajouté. Donc ce produit disparaît dans le résultat et il reste seulement la différence a^2 *moins* b^2. En conséquence, on peut écrire :

$$(1) \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Cette relation (que je désigne par un numéro pour pouvoir m'y reporter par la suite) est souvent appelée *identité.* Par ce mot on veut indiquer que les « deux membres » de l'égalité (1), c'est-à-dire les expressions algébriques écrites des deux côtés du signe = *ont des valeurs identiques quelles que soient les valeurs numériques que l'on donne aux lettres* a *et* b [si par exemple on « *fait* » $a = 7$ et $b = 3$, on a $a + b = 10$, $a - b = 4$, $a^2 = 49$, $b^2 = 9$, et l'on voit que le produit 10×4 est bien identique à la différence $49 - 9$; si l'on fait $a = 10$, $b = 8$, le produit 18×2 est identique à $100 - 64$, etc., etc.]

Une autre relation ou identité bien connue est la suivante :

$$(2) \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On l'établit en remarquant que $(a + b)^2$ est le produit de $(a + b)$ par $(a + b)$. Or, ce produit est égal à a *fois* $(a + b)$ *plus* b *fois* $(a + b)$ ou $(a^2 + a b)$ *plus* $(a b + b^2)$. Ici, comme tout à l'heure, nous avons deux fois, le produit $a b$, mais il est maintenant deux fois ajouté; donc il subsiste dans le résultat, multiplié par 2.

Par des raisonnements semblables on établit les identités classiques :

(3) $$(a - b)^2 = a^2 - 2 a b + b^2$$

(4) $$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$$

(5) $$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + a b + b^2)$$, etc., etc.

41. Les identités de l'algèbre permettent, disions-nous tout à l'heure, de simplifier l'exécution et de prévoir les résultats de certains calculs. Parmi les calculs que vient ainsi faciliter l'algèbre, les plus usuels sont ceux qui ont trait à la recherche de certaines quantités *inconnues* que l'on suppose *satisfaire à certaines conditions connues.* Plaçons-nous en particulier dans l'hypothèse où les conditions connues (données par l'énoncé du problème qu'on traite) se laissent exprimer sous la forme d'égalités algébriques, liant les *inconnues* du problème à d'autres quantités supposées *connues.* De telles égalités sont appelées « *équations* ». Les inconnues que l'on cherche seront dites « solutions » ou « racines » des équations, et si, par le calcul, on parvient à déterminer leurs valeurs, on dira que l'on a « résolu » les équations.

Soit, par exemple, à trouver une quantité inconnue x, qui satisfasse à la condition ou équation :

$$7x - 20 = 4x + 10$$

Quel que soit x, évidemment, les deux « membres » de l'égalité ci-dessus restent égaux lorsque de chacun d'eux on retranche $4x$. On a donc $3x - 20 = 10$. Ajoutons 20 à chaque membre. Cela donne $3x = 30$. En d'autres termes, *si l'égalité proposée est bien satisfaite*, il en sera de même de l'égalité $3x = 30$, et par conséquent x sera *égal* à 10. Inversement, si l'on fait $x = 10$ dans l'égalité proposée, on constate immédiatement qu'elle se trouvera vérifiée. Donc 10 est la valeur de l'inconnue cherchée. C'est la solution (solution unique) du problème posé.

Dans l'équation que nous venons de considérer les nombres autres que l'inconnue sont des nombres arithmétiques ordinaires. On peut, plus généralement, envisager une équation où figurent, en dehors de l'inconnue (ou des inconnues) des quantités qui sont, non point précisément connues, mais bien *supposées connues* : j'entends par là que ces quantités sont des lettres représentant des nombres qui sont regardés comme *donnés* et auxquels nous restons libres d'assigner telles valeurs qu'il nous plaira. Si, par exemple, a, b, c, d sont de telles quantités, nous pouvons prouver que l'équation

$$ax - b = cx + d$$

(laquelle se confond avec celle de tout à l'heure, quand

on y fait $a = 7$, $b = 20$, $c = 4$, $d = 10$), entraîne comme conséquence :

$$a x - c x \text{ ou } (a - c)\, x = b + d$$

Elle a donc pour solution ou racine : $x = \dfrac{b + d}{a - c}$

42. Considérons maintenant l'équation (dite du *second degré* parce qu'elle contient le carré ou seconde puissance de l'inconnue).

$$x^2 - b x + c = 0$$

Pour la « résoudre », nous observons que, quelles que soient les valeurs des quantités x, b et c nous avons *l'identité* (analogue aux identités du n° 40).

$$x^2 - b x + c = \left(x - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) \times \left(x - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)$$

C'est là un fait qu'il est aisé de *vérifier* en effectuant le produit (*) qui figure au second membre de l'iden-

(*) Ce produit se trouve en effet égal à la somme

$$x^2 - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\, x - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\, x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \times \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Effectuant toutes les multiplications et ajoutant ou retranchant les

tité. Si donc l'équation proposée est satisfaite, le produit en question devra être nul. Or nous remarquons qu'un produit de deux facteurs ne peut être nul que si l'un au moins de ces facteurs est nul. Dans le cas précédent le premier facteur s'annule si $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, le second facteur s'annule si $x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$.

Pour chacune de ces valeurs de x (en général différentes), le produit considéré sera bien nul et par conséquent l'équation proposée sera satisfaite. Donc l'équation a deux racines, qui sont les deux valeurs de x que nous venons d'écrire (*).

EXEMPLE. — Soit $b = 6$ et $c = 8$, c'est-à-dire soit considérée l'équation :

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad (ou\ x^2 + 8 - 6x = 0)$$

Nous avons ici $b^2 - 4c = 36 - 32 = 4$, donc $\sqrt{b^2 - 4c} = 2$, et les deux valeurs de x ci-dessus écrites deviennent $x = \frac{6+2}{2} = 4$ et $x = \frac{6-2}{2} = 2$.

Grâce aux formules générales que nous avons établies,

produits obtenus (suivant qu'ils sont précédés du signe + ou —) on constate que certains termes disparaissent, et il ne reste finalement que $x^2 - bx + c$.

(*) Dans la plupart des cours d'algèbre on considère, comme type d'équation du second degré, au lieu de l'équation $x^2 - bx + c = 0$ ci-dessus envisagée, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On obtient alors, pour les racines, des formules un peu plus compliquées.

nous pouvons affirmer à l'avance que ces deux valeurs 4 et 2 sont bien solutions de l'équation considérée; et en effet nous vérifions immédiatement que $4^2+8-6\times4$ est bien égal à 0 et de même $2^2+8-6\times2$.

43. Citons encore, comme exemple de problème sur les équations, le cas où l'on a à trouver *deux* inconnues x et y satisfaisant à des conditions qui s'expriment par *deux* équations. Soient proposées les équations :

$$ax+by=c \qquad a'x+b'y=c'$$

(les lettres accentuées désignent naturellement d'*autres* quantités que les lettres non accentuées; toutes ces quantités, à l'exception de x et y, sont « supposées connues »).

Multiplions les deux membres de la première équation par b'. L'égalité subsiste et nous avons donc :

$$ab'x+bb'y=cb'$$

Multiplions les deux membres de la seconde équation par b. Elle devient (*) :

$$a'bx+bb'y=c'b$$

Retranchons maintenant l'une de l'autre les deux nou-

(*) Remarquons que le produit de b par b' ne diffère pas du produit de b' par b. On peut l'écrire indifféremment bb' ou $b'b$.

velles égalités. Les deux termes $bb'y$ disparaissent, et il reste :

$$ab'x - a'bx = cb' - c'b$$

Dans cette dernière égalité, l'inconnue y ne figure plus. On en tire immédiatement $x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$. Telle est la valeur de l'inconnue x qui satisfait aux conditions du problème.

Par un calcul semblable, on trouverait la valeur inconnue de y. C'est la valeur $y = \frac{ca' - ac'}{a'b - ab'}$

LES CALCULS DE L'ALGEBRE SONT-ILS TOUJOURS LEGITIMES ?

44. Tel est le mécanisme de l'algèbre, grâce auquel, en progressant dans la voie où nous venons seulement de nous engager, on peut écrire de multiples identités et résoudre de nombreux types d'équations (non pas toutes les équations cependant). Je n'insisterai pas davantage sur les calculs que l'on est ainsi conduit à effectuer, car la poursuite de ces calculs ne soulève aucune nouvelle difficulté de principe : dans la science moderne, les opérations de l'agèbre ont bien — ou peu s'en faut — le caractère machinal et automatique que leurs créateurs avaient désiré leur donner. Elles se révèlent, d'autre part, extrêmement fécondes, et ainsi les considérations qui leur servent de base se trouvent, après coup, justifiées par un succès de plus en plus éclatant.

Cette justification a posteriori était, il faut le reconnaître,

tout à fait indispensable pour permettre aux savants modernes d'écarter définitivement les objections et les répugnances auxquelles l'emploi des procédés de l'algèbre avait tout d'abord donné lieu.

La force de la méthode algébrique réside, avons-nous dit, dans ce fait qu'elle manie et combine des signes symboliques sans se préoccuper chemin faisant de la signification ou de la valeur de ces signes. Ainsi la résolution d'un problème mathématique par l'algèbre se présente schématiquement comme il suit : 1° on exprime l'énoncé du problème sous forme algébrique en le dépouillant de son caractère arithmétique ou géométrique (*), et le traduisant (par exemple) en une ou plusieurs « équations » où entrent des quantités connues et inconnues représentées par des lettres; 2°on manipule ces équations suivant les règles de l'algèbre en oubliant momentanément ce qu'elles représentent; 3° ayant obtenu la « solution » algébrique du problème, on interprète cette solution en la retraduisant en termes arithmétiques ou géométriques. Dans l'opération mathématique ainsi conduite on voit où gît, pour le théoricien rigoureux, le point délicat. Sommes-nous sûrs que la seconde phase de l'opération soit toujours légitime? Sans doute nous avons le droit de faire temporairement abstraction de ce que représentent nos formules : mais c'est à la condition que ces *formules représentent en tout cas quelque chose;* s'il arrivait qu'à un moment donné elles ne puissent plus correspondre à aucune réalité (circonstance dont nous ne nous en apercevrions pas tout de suite puisque nous nous sommes interdits d'inter-

(*) J'anticipe ici sur ce qui sera expliqué au chapitre suivant,

préter, en cours de route, les formules que nous écrivons) alors les manipulations auxquelles nous nous livrons ne deviendraient-elles pas de purs non-sens ?

Pour lever cette objection il est nécessaire d'analyser beaucoup plus à fond que nous ne l'avons fait plus haut (n° 38) le contenu qu'on doit donner à la notion de « quantité algébrique » pour légitimer tous les calculs effectués sur elle. Et l'analyse ainsi faite oblige le mathématicien à donner à cette notion de quantité une extension considérable, si paradoxale même à certains égards, que seuls les succès remportés par l'algèbre peuvent la rendre acceptable à tous les esprits.

45. Dans les formules de l'algèbre figurent fréquemment, comme on l'a vu plus haut, des expressions telles que $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, etc. Des valeurs numériques qu'ont ces expressions, nous faisons abstraction; mais sommes-nous bien autorisés à affirmer qu'elles ont en tout cas des valeurs susceptibles d'être combinées (par le calcul) avec les valeurs numériques ordinaires (nombres entiers et fractionnaires) ? Admettre qu'il en est ainsi, c'est admettre d'abord que les « quantités irrationnelles » du n° 38 sont des éléments tout à fait comparables aux « quantités rationnelles » ; c'est admettre, en d'autres termes, que $\sqrt{2}$ est un nombre de même espèce que 3 ou $\frac{4}{7}$. Manière de voir qui ne nous surprend plus aujourd'hui parce que nous y sommes très habitués, mais qui est cependant toute conventionnelle et, aux yeux du philosophe, singulièrement hardie : elle ne se justifie, comme nous le disions tout à

l'heure que parce qu'elle ne donne lieu à aucune contradiction, et parce que nous y trouvons avantage.

ANTITES NEGATIVES

46. Poursuivons notre analyse. Dans les calculs algébriques apparaissent constamment des expressions telles que la suivante: $a - b+c$; et les règles de l'algèbre, calquées sur celles de l'arithmétique, stipulent que l'on a toujours $a - b+c=a+c - b$. Supposons cependant que $a=2$, $b=4$, $c=5$; alors nous avons d'une part, $a+c - b=2+5 - 4=3$; mais d'autre part, pour calculer $a - b+c$, il faut commencer par soustraire 4 de 2, ce qui est une opération absurde (puisqu'on ne peut pas soustraire un nombre d'un nombre plus petit). Ainsi, en appliquant automatiquement les règles de l'algèbre, nous nous trouvons constamment raisonner sur des opérations qui sont des non-sens. Et pourtant les raisonnements que nous faisons sont bons évidemment. Ils satisfont à la logique et ils conduisent à des résultats qui — eux — correspondent bien à des réalités (ainsi la suite d'opérations $2 - 4+5$ n'a en apparence pas de sens, et pourtant le résultat, 3,en a bien un). N'est-il pas raisonnable de supposer que de tels raisonnements doivent pouvoir être légitimés moyennant certaines interprétations, moyennant certaines conventions? Et, en effet, reportons-nous à la figuration des quantités algébriques indiquée au n° 38. Toute longueur telle que OA, portée à partir de O *et à droite* de O sur OX, représente une quantité algébrique. Mais pourquoi ne pas regarder aussi une longueur O A′ portée à *gauche* de O, sur le prolongement de O X, comme une quantité algébrique? Nous considérerons la longueur O A (et la quantité qu'elle repré-

sente comme *positive*, la longueur O A′ comme *négative* et nous caractériserons la différence des deux sortes de longueurs ou quantités par la définition suivante : « Pour *ajouter* sur la droite X′X, une longueur positive, à partir du point O ou, plus généralement, à partir d'un point quelconque C de la droite, on porte cette longueur *à droite*, et, pour *retrancher* la même longueur, on la porte *à gauche*. Au contraire, pour *ajouter* une longueur négative, on la porte *à gauche* à partir de C, et, pour la *retrancher*, on la porte *à droite* ».

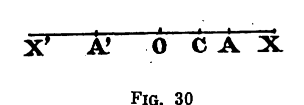


FIG. 30

De cette définition résultent presque immédiatement les règles qu'il faut suivre pour effectuer des calculs sur les longueurs ou quantités négatives.

Tout d'abord, nous remarquons qu'une longueur négative, telle que O A′, n'est autre chose qu'une longueur positive retranchée à partir du point O; en d'autres termes, *une quantité négative est une quantité positive retranchée de zéro*. Soit n la quantité négative considérée, p la quantité positive correspondante. Nous avons le droit d'écrire :

$$n = o - p \text{ ou } n = -p, \text{ et par suite aussi } p = -n.$$

La quantité positive p est appelée *valeur absolue* de la quantité n.

Soient maintenant considérées ensemble une quantité positive a et deux quantités négatives n, n' de valeurs absolues p, p'. Supposons par exemple que a soit plus grand que p, mais plus petit que p'. Nous voyons aussitôt

que : 1° *la somme* n+n′ *est la quantité négative de valeur absolue* p+p′ (elle est figurée à gauche de O par une longueur O B égale à $p+p'$) ; 2° *la somme* a+n *est obtenue* en portant *la longueur* A *à droite de* O, *suivant* O A, *puis ensuite la longueur* B *à partir de* A *et à gauche de* A; *le résultat est la longueur* O D (longueur $a - p$) ; 3° *la somme* a+n′, déterminée par le même procédé, donne comme résultat la longueur O D′, *quantité négative dont la valeur absolue est* p′ — a. Partant de là, on peut additionner ou soustraire sans difficulté toutes les quantités positives ou négatives.

Fig. 31

Si l'on veut, d'autre part, effectuer sur ces quantités des *multiplications* on raisonnera comme il suit :

Le produit de la quantité négative n *par la quantité positive* a — produit que, suivant les habitudes de l'algèbre, nous désignons par *a n* (ou *n a*) — *est une quantité négative de valeur absolue* a p. En effet, *a* fois *n*, c'est a *fois* p *retranché* de *zéro;* c'est par conséquent — *a p*.

Le produit des deux quantités négatives n et n′ — produit *n n′* — devra *être regardé comme égal à la quantité positive* pp′. En effet, puisque *moins* p *fois* p′ est pp′ il faut admettre que *moins* p *fois moins* p′, c'est — pp′.

C'est là en réalité une convention, je veux dire une définition; car la notion de multiplication de deux quantités négatives n'a *a priori* aucun sens. Nous sommes obligés de définir ce que nous convenons d'entendre par là. D'ailleurs, une fois la multiplication définie, la *division*

le sera également (le quotient ou rapport $\frac{a}{b}$ de deux quantités a et b est la quantité dont le produit par b est égal à a), ainsi que l'*extraction* de racines carrées, cubiques, etc. Tous les calculs que nous effectuons en algèbre sur les lettres a b, etc., auront ainsi désormais un sens bien déterminé, *que ces lettres représentent des quantités positives ou bien des quantités négatives.* Dans les deux cas, d'ailleurs, les quantités joueront des rôles absolument pareils; elles sont des éléments de calcul similaires et tous semblables, par conséquent, aux nombres de l'arithmétique qui forment une classe particulière de quantités positives. Pour rappeler ce fait, il est d'usage de donner à tous ces éléments le nom de *nombres algébriques* (positifs ou négatifs).

NOMBRES IMAGINAIRES.

47. Je viens de dire que toutes les opérations de l'algèbre, supposées effectuées sur des quantités négatives, ont un sens précis. Cela signifie que l'exécution de l'une quelconque de ces opérations constitue un problème déterminé, mais non pas que le dit problème a nécessairement une solution. Effectivement il est une opération assez usuelle qui, lorsqu'on l'applique à une quantité négative, ne donne point de solution, point de résultat : c'est l'extraction de la racine carrée (*). En effet, le carré a^2 d'une quantité positive a est naturellement positif; et, si a est une quantité négative, son carré, d'après la règle du

(*) La racine carrée d'une quantité b est, par définition, la quantité dont le carré est égal à b.

n° 46, est encore *positif*[1]: en d'autres termes, *une quantité négative n'a pas de racine carrée.*

Cette circonstance paraît, au premier abord, bien fâcheuse, car elle nous fait retomber dans la difficulté même qu'en introduisant les nombres négatifs nous nous efforcions précisément d'éviter. La question posée aux n°s 45 et 46 se présente devant nous encore une fois. Considérons, par exemple, la racine $\sqrt{b^2 - 4c}$ que nous avons rencontrée au n° 42, en résolvant l'équation du second degré $x^2 - bx + c = 0$. Si, par suite des valeurs prises par b ou c dans tel ou tel problème, la quantité $b^2 - 4c$ se trouve devenir négative, l'expression $\sqrt{b^2 - 4c}$ ne sera plus qu'un non-sens. Comment répondre, dès lors, de la légitimité des calculs portant sur de telles expressions, qui, suivant les valeurs des lettres, tantôt ont un sens, tantôt n'en ont pas, et que nous prétendons cependant manipuler de la même manière dans l'un et l'autre cas?

La difficulté s'évanouit si l'on a recours à une nouvelle convention, à une fiction, pour mieux dire, qui paraît fort étrange au premier abord, mais que la logique autorise.

Regardons la racine carrée du nombre négatif -1 comme une « quantité » fictive, qui n'existe pas dans le monde réel, mais qui, du point de vue logique, obéit aux mêmes règles et se prête aux mêmes opérations que les vraies quantités. Désignons cette pseudo-quantité par la lettre i et convenons de *calculer sur cette lettre* exactement comme sur les lettres qui représentent des quantités algébriques ordinaires.

De cette simple convention, nous tirons, en effectuant des calculs purement mécaniques, les conséquences suivantes :

De même que le carré i^2 est égal à -1 (car, par définition $i=\sqrt{-1}$, ce qui veut dire que $i^2=-1$), de même le carré de $-i$ (ou produit de $-i$ par $-i$) sera aussi égal à -1 [car $(-i) \times (-i) = i^2$]. Cette première conséquence est à elle seule déjà précieuse, car elle introduit dans les calculs de l'algèbre une symétrie remarquable. Tout nombre positif a manifestement deux racines carrées égales et de signes contraires, car si le produit de a par a est égal à b, il en sera de même du produit de $-a$ par $-a$. Pareillement tout nombre négatif n aura désormais, grâce à la définition de i, deux racines carrées. Soit, en effet, p la valeur absolue de n (voir n° 46). Nous avons $n=$ *p multiplié par* -1 ou $p\times(-1)$. Appelons a une racine carrée de p telle que $a^2=p$. Les deux quantités ai et $-ai$ seront alors toutes deux racines carrées de n, car toutes deux auront pour carré a^2i^2 ou i^2a^2, c'est-à-dire $-a^2$, ou $-p$, donc n.

Mais, poursuivons nos calculs. D'après nos conventions, nous pouvons multiplier i par une quantité quelconque (*) β en écrivant simplement βi; ajoutons βi à la quantité α; nous aurons $\alpha+\beta i$; cette expression (somme d'une quantité ordinaire et d'une quantité ordinaire multipliée par i) est appelée par les algébristes: *quantité* (ou *nombre*) *imaginaire complexe* ou simplement *complexe*. De cette définition résulte aussitôt que *la somme*

(*) Je me sers ici de lettres grecques afin d'éviter les confusions auxquelles on s'expose si l'on emploie sans cesse les mêmes lettres a, b, c dans des sens constamment différents.

de deux quantités complexes est une quantité complexe, car si nous ajoutons $\gamma+\delta i$ à $\alpha+\beta i$, nous obtenons (puisque nous sommes convenus de calculer sur i comme sur les quantités ordinaires) :

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i,$$

ce qu'est bien la somme d'une quantité ordinaire et d'une quantité ordinaire multipliée par i.

Je dis que pareillement *le produit de deux quantités complexes est une quantité complexe.* En effet, de même que le produit (*) $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$ est égal à $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$, de même le produit $(\alpha+\beta i)\times(\gamma+\delta i)$ sera égal à $\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2$; or $i^2=-1$; donc, en changeant l'ordre des termes et groupant les deux termes du milieu, nous aurons :

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i,$$

ce qui est bien une quantité complexe.

En passant ainsi en revue toute la série des opérations algébriques, nous parviendrons à la conclusion générale suivante dont la portée est considérable : *si sur des quantités complexes quelconques on effectue une série d'opérations quelconques, les résultats des opérations seront sûrement toujours des quantités complexes.*

De là résulte aussitôt cette conséquence : Supposons que désormais les lettres *a*, *b*, *c*, etc., figurant dans

(*) Le signe $\times$ peut être supprimé dans l'indication du produit (Cf. N° 39).

les formules algébriques représentent des quantités complexes (du type $\alpha+\beta i$, somme d'une quantité ordinaire et d'une quantité ordinaire multiplié par i). Alors, *toutes* les expressions que nous écrirons représenteront elles-mêmes des quantités complexes et toutes les opérations de l'algèbre se trouveront *ipso facto* légitimées dès le moment où l'on aura accepté nos conventions sur le symbole i. L'extraction de la racine carrée sera elle-même dorénavant une opération toujours possible, car on constate (*) que *toute* quantité complexe aura, comme les quantités ordinaires deux « racines carrées », qui seront des quantités complexes.

Remarquons d'ailleurs que les quantités appelées complexes, ou certaines d'entre elles, peuvent éventuellement se confondre avec des quantités ordinaires; en effet, si dans l'expression $\alpha+\beta i$, le nombre β devient nul, la quantité se réduit à α (quantité ordinaire). Ainsi l'algèbre des quantités complexes comprend comme cas particulier l'algèbre des quantités ordinaires, que l'on appellera (pour les distinguer) *quantités* ou *nombres réels*. En d'autres termes, la classe générale des nombres complexes comprend comme classe particulière celle des nombres réels.

48. Paradoxe, fantaisie, que tout cela, sera-t-on d'abord tenté de dire. Mais non, l'intervention des quantités imaginaires complexes répond à un besoin réel des mathématiciens et exprime un ensemble de vérités

(*) J'ai dit tout à l'heure qu'il en est ainsi pour toute quantité positive ou négative. J'ajoute maintenant qu'il en est encore de même pour toute quantité complexe.

positives. Elle nous sert à *prouver* que le mécanisme logique des opérations de l'algèbre n'implique en lui-même aucune contradiction et par suite est légitime. En termes plus précis, si une série de calculs, partant de données réelles et aboutissant à un résultat réel, nous fait passer en cours de route par des formules qui n'ont pas de sens réel, nous n'en avons pas moins le droit d'affirmer que cette série de calculs est bien correcte et que le résultat en est valable. La critique fondamentale que l'on pouvait adresser à l'algèbre et que nous avons indiquée plus haut (n° 44) se trouve écartée. Débarrassé désormais de tout souci relatif à la légitimité de ses opérations, l'algébriste peut exécuter celles-ci d'une manière purement mécanique et machinale. Ainsi, avec moins d'effort, il en tirera un meilleur rendement.

49. Je me suis efforcé de faire comprendre quel est le point de vue et quel est le point de départ de l'algèbre. L'exposé qui précède ne saurait, pourtant, donner une idée exacte de la variété, de l'ingéniosité et de la puissance des moyens que l'algébriste met en œuvre pour perfectionner ses procédés. L'algébriste, nous l'avons dit, cherche à définir et à étudier *a priori* divers types d'opérations et de combinaisons d'opérations. Quel sens, cependant, faut-il donner ici au mot « opération » ? Ce sens n'est pas limité. A l'origine on s'est contenté d'envisager les quatre opérations de l'arithmétique (ainsi que l'opération appelée « extraction de racine » qui n'est au fond, que l'opération inverse d'une certaine multiplication). Mais on peut concevoir bien d'autres manières de combiner les nombres ou de « déduire un

nombre d'un ou de plusieurs autres » (ce qui est l'objet poursuivi dans toute opération). Ainsi, en définissant des règles *ad hoc*, on pourra créer de toutes pièces de nouveaux types de calculs. Tels sont les *calculs de logarithmes*, bien connus de toutes les personnes auxquelles la pratique du calcul est familière. Tels sont aussi les *calculs trigonométriques* dont je dois ici dire quelques mots.

CALCULS TRIGONOMETRIQUES.

50. Soit un cercle de centre O dont le rayon est égal à l'unité (*un mètre*, par exemple) et soient A'A et B'B deux diamètres de ce cercle qui se *coupent à angle droit* (fig. 32)

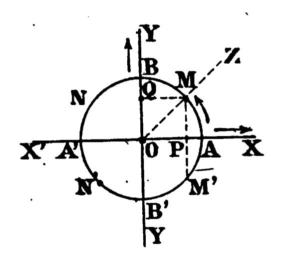


FIG. 32

et que nous prolongeons indéfiniment dans les deux sens. Prenons un point quelconque M sur la circonférence et de ce point abaissons des perpendiculaires MP et MQ sur A'A et B'B (les pieds P et Q de ces perpendiculaires sont appelées « *projections* » du point M sur A'A et B'B). Cela fait, mesurons *sur la circonférence* la longueur curviligne A M et mesurons

d'autre part les longeurs O P et O Q. Nous dirons que la longueur O Q est le *sinus* de la longueur A M et que la longueur O P en est le *cosinus*. Ainsi à une quantité d'ailleurs quelconque (longueur A M) nous faisons correspondre deux autres quantités (*sinus* et *cosinus* de A M) par une « construction géométrique » effectuée suivant des règles déterminées. Cette construction constitue une « opération », d'un genre particulier, effectuée sur la quantité A M.

D'ailleurs, si l'on veut rendre l'opération en question féconde et maniable, il est avantageux de compléter comme il suit la définition qui précède :

1° Convenons de considérer la longueur A M (de même que sa mesure) comme *positive* si elle est portée sur la circonférence dans le sens de la flèche, et au contraire comme *négative* si elle est portée en sens inverse. Cette convention est exactement celle que nous avons faite au n° 46 avec cette différence que les longueurs ici considérées sont portées, non sur une droite, mais sur une circonférence : d'où cette circonstance nouvelle que les mêmes points se trouvent être ici les extrémités de plusieurs longueurs différentes.

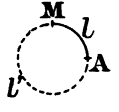


FIG. 33

C'est ainsi que, sur la figure 33, A et M sont les extrémités de la longueur *positive* (arc de circonférence) *l*, figurée en trait plein, et aussi de longueur *négative* *l'* tracée en pointillé. Ce n'est pas tout. La longueur totale de la circonférence de rayon 1 est, comme on ait, une longueur comprise entre 6 et 7 et voisine de 2 × ,14; on le désigne par 2π, en appelant π la mesure le la longueur de la demi-circonférence (quantité irra-

tionnelle). Considérons dès lors la longueur $2\pi+l$ portée positivement sur la circonférence (ce qui donne : un tour complet sur la circonférence *plus* l'arc en trait plein A M) ; elle a encore pour extrémités A et M ; de même les longueurs $4\pi+l$, $6\pi+l$, etc. et $l-2\pi$, $l-4\pi$, etc. (longueurs négatives). Pareillement les longueurs $2\pi+l'$, ou $l'-2\pi$, etc.

2° Convenons de considérer la longueur O P (ou *cosinus* de A M) comme *positive* si elle est portée sur X′ X (voir fig. 32) dans le sens de la flèche et comme *négative* si elle est portée en sens inverse. C'est la convention du n° 46.

3° Convenons de considérer la longueur O Q (ou *sinus* de A M) comme positive si elle est portée sur la droite Y′ Y dans le sens de la flèche (verticalement) et comme *négative* dans le cas contraire. C'est la même convention appliquée à la droite Y′ Y.

51. Ces conventions faites, nous voyons d'abord qu'à toute quantité algébrique réelle correspondra un et un seul *sinus* bien déterminé et un et un seul *cosinus*, car toute quantité algébrique définit (n.os 38 et 46) une longueur positive ou négative que l'on peut, d'après les conventions ci-dessus porter sur la circonférence à partir de A. D'ailleurs on voit sur la figure 32 que si l'extrémité de la longueur considérée tombe entre A et B (comme M), le *sinus* et le *cosinus* sont tous deux positifs. Si elle tombe entre B et A′ (comme N) on constate immédiatement (en construisant les « projections de N sur A′ A et B′ B) que le *sinus* est positif et le *cosinus* négatif. Si elle tombe en N′ (entre A′ et B′),

sinus et *cosinus* sont tous deux négatifs. Si elle vient en M′, le *cosinus* est positif, le *sinus* négatif. Ajoutons que, lorsque les longueurs de signes contraires A M et A M′ sont égales en valeur absolue (c'est-à-dire sont symétriques par rapport à A′ A), les perpendiculaires abaissées de M et M′ sur A′ A tombent au même point P (fig. 32) en sorte que A M et A M′ ont même *cosinus* et des *sinus* égaux et de signes contraires; en appelant, par exemple t la longueur A M et par suite $-t$ la longueur A M′, désignant d'autre part par $\cos t$ et $\cos(-t)$ le *cosinus* de t et celui de $-t$, et de même pour le *sinus*, nous exprimerons comme il suit ce dernier fait :

$$\cos t = \cos(-t)\ ;\ \sin t = \sin(-t).$$

Nous avons là deux « formules trigonométriques », qui sont vraies pour toute valeur de la longueur, ou quantité algébrique t. D'après une remarque faite plus haut, nous aurons aussi (*), quel que soit t :

$$(6)\qquad \cos(2\pi + t) = \cos t;\ \sin(2\pi + t) = \sin t;$$

et, en nous référant aux propriétés géométriques du cercle et des droites de la figure 32, nous obtiendrons très facilement un grand nombre d'autres formules. A titre d'exemples, donnons-en ici quelques-unes :

Par définition la demi-circonférence de A en A′ a

(*) Par cos $(2\pi + t)$ nous entendons le cosinus de la quantité $(2\pi + t)$.

pour longueur π, le quart de circonférence A B a pour longueur $\frac{\pi}{2}$. Nous en concluons immédiatement que (*) :

$$\sin \pi = 0;\ \cos \pi = -1;\ \sin \frac{\pi}{2} = 1;\quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

D'ailleurs, pour M coïncidant avec A, le point P vient en A; donc on a *sinus de zéro* ou $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$.

D'autre part, on peut démontrer, que, quelle que soit la quantité t positive ou négative, on a toujours les relations (**) (ou « identités ») suivantes :

(7) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,

(8) $\sin t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, etc., etc.

Soient, d'autre part, t et q deux longueurs *quelconques* portées sur la circonférence : on démontre que le *sinus* et le *cosinus* de leur somme auront toujours pour valeurs certaines sommes de produits formés avec les sinus et cosinus de t et de q, savoir :

$$\sin (t+q) = \sin t \times \cos q + \cos t \times \sin q$$
$$\cos (t+q) = \cos t \times \cos q - \sin t \times \sin q$$

(*) Rappelons-nous que les valeurs absolues de OA, OA′, OB et OB′, égales au rayon du cercle, sont toutes égales à 1.

(**) La première résulte immédiatement du théorème de Pythag (n° 21). Ainsi, sur la fig. 32, dans le triangle OMP, on a

$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$. Or $PM = OQ$ et $OM = 1$.

Et ainsi de suite. En continuant de la sorte, on constitue tout un système de calcul (*calcul trigonométrique*) qui rend de précieux services en mécanique et en astronomie et qui joue également un rôle très important dans les mathématiques pures.

Je signale que dans ce calcul le rapport du *sinus* d'une quantité au *cosinus* de la même quantité est d'ordinaire appelé *tangente trigonométrique*, ou simplement *tangente*, de la quantité.

Remarquons, d'autre part, que la longueur A M, comptée comme il a été dit ci-dessus sur la circonférence de rayon 1, peut être prise pour mesure de l'angle AOM (fig. 32) ; on pourra donc dire que *sin t, cos t* sont le *sinus* et le *cosinus* de cet angle. D'une manière générale, supposant donné un angle quelconque XOZ, coupons-le par la circonférence de centre O et de rayon 1 ; nous obtiendrons alors la figure 32, c'est-à-dire l'arc de cercle A M, son *sinus*, son *cosinus* : ces derniers seront, par définition, le *sinus* et le *cosinus* de l'angle XOZ.

RIES INFINIES. **52.** Un autre genre de calcul — qui, celui-là, est devenu la base essentielle de la technique mathématique moderne — est le calcul où l'on manipule des suites ou séries indéfinies d'opérations, se succédant suivant certaines lois déterminées.

L'idée première et l'application la plus simple du calcul en question se présente à l'occasion des nombres ou quantités que nous avons appelées « irrationnelles » (n° 38).

Considérons par exemple, la longueur de la demi-circonférence de rayon 1, dont la mesure est une quantité π

irrationnelle, voisine de 3, 14 (voir n° 50). Le nombre fractionnaire 3, 14 peut s'écrire sous la forme $3+\frac{14}{100}$ ou encore $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}$. Il n'est pas la valeur exacte de π [qui, étant irrationnelle, ne se trouve égale à aucune fraction (*)], mais il en est une valeur approchée, et l'on démontre qu'il en diffère de moins d'un *centième d'unité.* Une valeur plus approchée de π (approchée à moins d'un *millième* d'unité) est le nombre $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1.000}$; une valeur plus approchée encore est $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1.000}+\frac{5}{10.000}$; cependant aucune de ces valeurs n'est exacte. En ajoutant à la dernière un certain nombre de *cent-millièmes* d'unités, puis un certain nombre de *millionièmes*, et ainsi de suite, on aura des valeurs de π de *plus en plus approchées* et pourtant on n'atteindra jamais π; pour l'atteindre, il faudrait ajouter « *indéfiniment* » des termes de plus en plus petits, c'est-à-dire donner à la somme ci-dessus un nombre infini de termes. Pour exprimer ce fait, on écrit l'égalité suivante :

$$(9) \qquad \pi=3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1.000}+\frac{5}{10.000}+\ldots..$$

(*) Tout nombre qui, comme 3,14 est la somme d'un nombre entier et de fractions peut être écrit, si l'on veut, sous la forme d'une fraction unique. Ainsi $3,14=\frac{314}{100}$

où les points signifient que la série des opérations indiquées n'est pas et ne saurait être close. L'égalité (9) ne sera rigoureuse que si, par la pensée, nous y rétablissons la suite *infinie* des termes sous-entendus; mais, telle qu'elle est, elle suffit à nous montrer comment nous pourrons nous y prendre pour calculer π avec une approximation aussi grande que nous le voudrons (une « *approximation arbitrairement grande* », disent les mathématiciens). En effet, supposons que, déterminant autant de termes qu'il nous plaira de la somme ci-dessus, nous *arrêtions* cette somme à son 10ᵉ ou à son 100ᵉ, ou à son 200ᵉ terme, etc. (en supprimant tous les termes suivants) ; nous aurons ainsi des valeurs s'approchant arbitrairement de la vraie longueur de la demi-circonférence.

Le second membre indéfiniment prolongeable de l'égalité (9) est ce qu'on appelle une *série*. Ses termes se succèdent suivant une certaine loi; en particulier, on voit qu'ils ont pour dénominateurs les *puissances* successives de 10, leurs numérateurs étant des nombres inférieurs à 10. L'ensemble des termes sous-entendus dans l'égalité (9) est appelé le « *reste* » de la série, reste d'autant plus petit que l'on a écrit plus de termes. Le nombre π est la « *somme* » de la série.

53. Tous les nombres irrationnels, tels que $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ pouvant être représentés par des séries semblables, dont ils sont les sommes. D'ailleurs, en appliquant certaines règles que les algébristes ont su établir, on parvient

à « calculer » sur les séries, c'est-à-dire à les ajouter, à les retrancher et à les combiner de diverses manières. Ainsi l'on peut, par l'intermédiaire des séries, effectuer toutes sortes d'opérations sur les nombres irrationnels. C'est là un fait d'une très grande portée, dont voici une première conséquence intéressante :

Lorsqu'au n° 38 nous avons voulu donner un sens à la notion de quantité irrationnelle, nous avons été obligés de faire appel à des considérations géométriques en nous référant à la notion de *longueur*. Nous voyons maintenant que l'on peut définir les quantités irrationnelles, et apprendre à calculer sur elles, sans autre secours que celui de l'artithmétique ; un nombre irrationnel sera, par définition, la somme d'une certaine *série* de nombres rationnels. Au premier abord, cette définition nous trouble un peu parce que le mot « infini » a pour les non-mathématiciens (et il en fut de même pour les mathématiciens jusqu'à la fin du XVIIIe siècle), quelque chose de mystérieux. Mais le mystère se dissipe complètement lorsqu'on comprend bien l'idée qui est couverte par ce mot, savoir la notion d' « approximation arbitrairement grande ». La somme d'une suite infinie, c'est — d'une façon précise — le nombre dont on peut calculer une valeur aussi approchée qu'on le veut à la condition de prendre (et d'additionner) suffisamment de termes dans une suite ou série infinie.

54. En faisant usage des séries, on peut, non seulement donner une « expression » des nombres irrationnels déjà définis par d'autres considérations (tels que π ou $\sqrt{2}$), mais aussi définir pour la première fois une foule

de nombres irrationnels nouveaux. Ainsi par exemple, la série :

$$(10) \qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\dots$$

a pour somme un nombre irrationnel, fameux dans la théorie des logarithmes, que l'on désigne d'ordinaire par la lettre e : la loi de succession des termes de la série (à partir du second) se voit immédiatement : on a des fractions de numérateur 1, dont les dénominateurs sont 1 (le premier nombre) (*), puis le produit des 2 premiers nombres, puis le produit des 3 premiers nombres, des 4 premiers nombres, etc., etc.

Voyons maintenant comment on se servira des séries pour effectuer des calculs où figurent des lettres, c'est-à-dire des éléments dont la valeur n'est pas déterminée à l'avance, mais est susceptible de varier selon les problèmes que l'on traitera. Pour les raisons que nous avons exposées au début de ce chapitre, de tels calculs présentent un intérêt particulier par ce qu'ils permettent d'embrasser dans une seule formule — calculée d'avance — les solutions de problèmes nombreux et variés.

(*) La fraction $\frac{1}{1}$ est naturellement égale à 1. Mais on écrit -, au lieu de 1, pour mieux mettre en évidence la loi de succes- n des termes de la série.

Soit t une quantité algébrique réelle (*) quelconque. Considérons la série :

$$(11) \qquad 1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{1\times 2}+\frac{t^3}{1\times 2\times 3}+\frac{t^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{t^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}+\ldots$$

déduite immédiatement de la série (10) ci-dessus en y remplaçant les numérateurs des fractions par les *puissances* successives de t. On démontre que, quel que soit t, il existe une certaine longueur ou quantité algébrique dont la somme ci-dessus devient arbitrairement voisine lorsqu'on en calcule de plus en plus de termes (en négligeant le reste, c'est-à-dire les termes sous-entendus). On exprime ce fait en disant que la série (11) a *effectivement* une *somme*, laquelle est une quantité algébrique bien déterminée. On dit aussi que la série (11) est *convergente*.

En appliquant d'une manière systématique ce mode de définition des quantités algébriques, par des séries infinies, on parvient à des conséquences bien remarquables. Ainsi l'on constate que, quelle que soit la quantité t, la quantité $\cos t$ se trouve être égale à la somme de la série suivante :

$$(12) \qquad \cos t = 1-\frac{t^2}{1\times 2}+\frac{t^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \frac{t^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}+\ldots$$

(*) Nous la supposons réelle pour nous faire mieux comprendre. On parviendrait aux mêmes conclusions si on la supposait *complexe* (*imaginaire*).

Comme on le voit, cette série est formée en prenant les termes de la série (11) *de deux en deux* (*à partir du premier*) et les faisant précéder alternativement du signe + et du signe —. Pareillement l'on trouve que :

$$(13) \quad \sin t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{t^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} - \cdots$$

série obtenue en prenant les termes de la série (11) *de deux en deux à partir du second* et les faisant précéder alternativement des signes + et —.

On peut utiliser ces séries pour étudier les propriétés du *cosinus* et du *sinus*. Et l'on peut, d'autre part, au moyen de séries analogues, former d'autres expressions, d'autres formules algébriques, jouissant de propriétés importantes.

55. Nous reviendrons dans un prochain chapitre sur l'étude des séries et, pour l'instant, je me contente d'ajouter deux remarques à l'aperçu qui précède.

Il est clair que les séries sont surtout avantageuses pour représenter des quantités irrationnelles ou des combinaisons algébriques qu'on ne pourrait obtenir *au moyen d'un nombre fini d'opérations* (et, en effet, si un nombre fini d'opérations suffisait, pourquoi en introduirait-on une infinité?). Néanmoins l'usage des séries n'est point limité à ce cas. C'est ainsi que l'exemple le plus simple et le plus classique de *série convergente* (série déjà étudiée par Archimède) est la progression géométrique infinie ayant pour somme un nombre rationnel.

Considérons une progression géométrique définie comme il a été dit au n° 4 (Chap. Ier), mais dont la raison, au lieu d'être un nombre entier, soit un nombre *rationnel* r *inférieur à* 1. Supposons de plus (pour simplifier) que le premier terme soit 1. Alors les termes successifs de la progression seront 1, r, r^2, r^3, etc.. Or on démontre que (pour r moindre que 1 comme il vient d'être dit) la série

$$(14) \qquad 1+r+r^2+r^3+\ldots.$$

est une série *convergente* (c'est-à-dire que la somme de ses n premiers termes approche de plus en plus d'une valeur déterminée lorsque le nombre n va grandissant) et, plus précisément, *qu'elle a pour somme le nombre rationnel* (*) $\frac{1}{1-r}$. Ainsi, par exemple, lorsque $r=\frac{1}{2}$, (et

(*) Ce fait peut être déduit de la règle donnée au n° 4, après que l'on a étendu cette règle (ce qui est facile) au cas où la *raison* n'est pas un nombre entier. Le $(n+1)^{me}$ terme de la progression est r^n. Donc la somme des n premiers termes est :

$$\frac{r^n-1}{r-1} \text{ ou } \frac{1-r^n}{1-r} \text{ ou } \frac{1}{1-r}-\frac{r^n}{1-r}$$

Mais, quand n augmente indéfiniment, r^n et par suite $\frac{r^n}{1-r}$ devient de plus en plus petit. Donc, *à la limite* (comme on dit), la somme (somme de *tous* les termes, en nombre infini, de la progression) se réduit à $\frac{1}{1-r}$.

par suite $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$), on a (*) :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = 2$$

Ainsi ici nous avons une série représentant un nombre rationnel extrêmement simple.

Autre remarque : Nous avons dit tout à l'heure que l'on pouvait regarder les nombres irrationnels tels que π, $\sqrt{2}$, e, etc. comme des sommes de séries convergentes. Si, inversement, l'on part d'une *série*, c'est-à-dire d'une suite de termes se succédant suivant une loi déterminée, il n'est nullement certain que cette série représente une *quantité*, c'est-à-dire que la somme de ses « n *premiers termes* » s'approche d'une limite lorsque n devient arbitrairement grand. Ainsi considérons la série (14) écrite ci-dessus. D'après ce qui précède, si r est plus petit que 1, cette série est convergente et a pour somme $\frac{1}{1-r}$ (et ceci est vrai aussi bien lorsque r est une quantité irrationnelle que lorsque r est rationnel). Par contre, si *r est un nombre plus grand que 1*, on démontre que la série (14) ne représente aucun nombre : en effet,

(*) Le carré, le cube, etc..., de $\frac{1}{2}$ est égal à 1 divisé par le carré, le cube, etc..., de 2.

la somme de ses termes se trouve alors devenir infiniment grande lorsqu'on considère de plus en plus de termes. Quand une telle circonstance se présente (et cela arrivera le plus souvent si l'on considère une série *choisie au hasard*), on dit que la série est *divergente* et qu'elle n'a *pas de somme.*

CHAPITRE V

Géométrie analytique. Fonctions et dérivées.

56. Nous avons vu comment l'algèbre permet d'effectuer des calculs portant sur des grandeurs géométriques et plus particulièrement sur des longueurs. Elle constitue donc un précieux instrument pour l'étude de cette partie essentielle de la géométrie où il est question de relations entre longueurs, telles que théorème de Pythagore, proportions dans les triangles semblables, etc., etc. Par contre, l'algèbre semble à première vue n'avoir rien à faire avec cette autre partie de la géométrie où l'on considère, non des grandeurs, mais des formes, des situations, des positions relatives de figures — toutes choses qui paraissent ne pouvoir donner lieu à aucun calcul.

C'est là pourtant un jugement trop hâtif. Grâce à l'emploi d'un procédé très simple, qui n'avait pas échappé aux géomètres de l'antiquité, mais dont Descartes le premier aperçut la portée générale, on peut ramener l'étude des positions,et généralement l'étude de toutes les propriétés qualitatives des figures, à des calculs portant sur des longueurs positives ou négatives et pouvant être effectués à l'aide des méthodes de l'algèbre.

COORDONNÉES. **57.** Considérons, comme nous l'avons fait au n° 50, deux droites « rectangulaires » indéfiniment prolongées, soit les « axes » X'X et Y'Y, qui se coupent en O (fig. 34). Prenons ensuite un point quelconque M dans le plan des deux droites et déterminons ses projections (P et Q) sur X'X et Y'Y en abaissant des perpendiculaires sur les « axes ». C'est là exactement la construction que nous avons faite au n° 50 *à cela près que le point* M *est maintenant quelconque au lieu d'être sur la circonférence de centre* O *et de rayon* 1.. Nous considérerons la longueur OP comme *positive* ou comme *négative* en nous conformant à la règle indiquée au n° 50; c'est-à-dire qu'elle sera positive si P est à droite de O et négative dans le cas contraire. Pareillement la longueur OQ sera *positive* si Q est au-dessus de O et *négative* s'il est au-dessous. — La longueur OP qui, dans la construction du n° 50, portait le nom de « cosinus », sera ici appelée « *abscisse du point* M »; la longueur (*) OQ qui portait le nom de « sinus », sera maintenant l' « *ordonnée du point M* ». D'ailleurs, il est clair que si M prend toutes les positions possibles dans le plan de la figure, son abscisse et son ordonnée passent par toutes les valeurs possibles (positives et négatives). En d'autres ter-

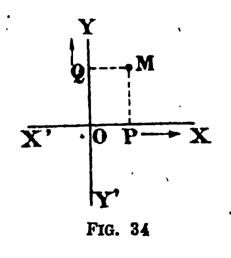


FIG. 34

(*) Remarquons tout de suite que la longueur OQ est égale à PM (voir fig. 34). Donc, l'ordonnée de M n'est autre que la « *distance de ce point à l'axe X'X, prise avec le signe + ou avec le signe — suivant que M est au-dessus ou au-dessous de X'X* ».

mes, l'abscisse et l'ordonnée sont des quantités algébriques qui peuvent prendre des valeurs *réelles* quelconques (valeurs réelles au sens du n° 47). Et alors, immédiatement, la double remarque suivante s'impose à notre attention : *A tout point* M *du plan correspond un couple de quantités algébriques (son abscisse et son ordonnée) bien déterminées et déterminées d'une manière unique* (car à une position donnée de M correspond une seule projection P sur X′ X, une seule projection Q sur Y′ Y, donc une seule abscisse, une seule ordonnée). *Et, réciproquement, à tout couple, quel qu'il soit, de quantités algébriques (dont la première est prise pour abscisse, la seconde pour ordonnée) correspond un point du plan bien déterminé et unique* (car, si l'on se donne une abscisse et une ordonnée, on se donne par là même les deux points P et Q; on peut alors mener par ces points les droites perpendiculaires à X′ X et Y′ Y, droites qui se coupent en un point unique M).

Cette double remarque, dont l'importance est capitale, a au fond la signification suivante : *Position dans un plan* et *couple de quantités algébriques* sont des notions qui se correspondent rigoureusement. D'une manière semblable, le géomètre pourra définir la position d'un point dans l'espace à trois dimensions au moyen de *trois* quantités algébriques; il se servira dans ce but de trois droites ou axes rectangulaires (par exemple les trois arêtes d'un cube issues d'un même sommet et indéfiniment prolongées) et il considérera les « projections » sur ces axes du point de l'espace. Mais contentons-nous ici d'envisager des points tous situés dans un même plan, le plan des droites X′ X et Y′ Y; nous appellerons ces droites « *axes de*

coordonnées » et le point O « *origine* » (ou *origine des coordonnées*), et nous dirons que l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M sont les deux « coordonnées » de ce point.

58. Si au lieu de considérer un point unique, on envisage une figure formée de points du plan, ou bien plusieurs figures dont les positions ont entre elles certaines

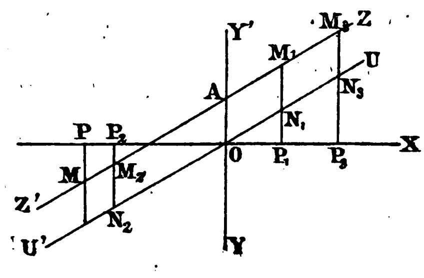


FIG. 35

relations, on aperçoit aussitôt le parti qu'on peut tirer des remarques qui précèdent..

Proposons-nous tout d'abord d'étudier une droite Z′ Z. Par l'origine je mène la droite U′ U parallèle à Z′ Z. Puis, prenant sur Z′ Z des points absolument quelconques, tels que M_1, M_2, M_3 (fig. 35), marquons les points N_1, N_2, N_3 de U′U qui ont respectivement *la même abscisse* que les points M_1, M_2, M_3 (sur la figure, les points M_1 et N_1 ont pour abscisse commune la longueur positive O P_1, les points M_2 et N_2 ont pour abscisse la longueur négative O P_2, etc.). J'observe que la *différence des ordonnées des points correspondants*

(tels que M_1 et N_1, M_2 et N_2) sur *les parallèles* $Z'Z$ et $U'U$ *a toujours la même valeur;* elle est égale à la longueur OA (portion de l'axe $Y'Y$ comprise entre les deux parallèles), qui est positive ou négative suivant que $Z'Z$ est au-dessus ou au-dessous de $U'U$. En effet, en vertu d'une remarque faite au n° 57 (voir la note au bas de la page) les ordonnées des points M_1, N_1, M_2, N_2, etc., sont égales aux longueurs positives ou négatives P_1M_1, P_1N_1, P_2M_2, P_2N_2, etc., en sorte que les différences d'ordonnées à considérer ne sont autres que les longueurs N_1M_1, N_2M_2, etc. D'ailleurs, les droites N_1M_1, N_2M_2, N_3M_3 sont toutes perpendiculaires à $X'X$ et par suite parallèles à OA. Il en résulte que les quadrilatères OAM_1N_1, OAM_2N_2, OAM_3N_3, etc. sont des *parallélogrammes* (quadrilatères dont les côtés opposés sont parallèles), et un théorème classique de géométrie nous apprend que, dans chacun de ces parallélogrammes, *les côtés opposés sont égaux;* donc on a $N_1M_1=OA$, et de même $N_2M_2=OA$, et de même $N_3M_3=OA$, etc.

Ces faits me montrent que, pour calculer les ordonnées des points M_1, M_2, M_3 (qui sont *variables* sur la droite $Z'Z$), il suffira de calculer celles des points correspondants N_1, N_2, N_3 et d'ajouter la *longueur constante* OA que je désignerai par la lettre p (je dis que cette quantité est « constante » parce qu'elle reste immuable lorsque les points M_1 M_2, etc., se déplacent).

Or, en poursuivant mon analyse, j'observe que les ordonnées des points N_1, N_2, etc. jouissent d'une propriété remarquable qui se traduit par une relation entre ces ordonnées et les abscisses des mêmes points.

Les deux triangles $O P_1 N_1$ et $O P_2 N_2$ sont *semblables* (d'après les théorèmes énoncés aux nos 13 et 15). Il en résulte que leurs côtés sont proportionnels (n° 15) c'est-à-dire, en particulier, que $\frac{P_1 N_1}{O P_1} = \frac{P_2 N_2}{O P_2}$. Pareillement on démontre que les deux triangles $O P_1 N_1$ et $O P_2 N_2$ sont semblables et il en résulte que l'on a $\frac{P_2 N_2}{O P_2} = \frac{P_1 N_1}{O P_1}$. Il est vrai que lorsque nous écrivons ces égalités en nous fondant sur l'énoncé de notre n° 15, nous désignons par $P_1 N_1$, $O P_1$, etc. les longueurs des côtés d'un triangle, longueurs que le géomètre ne regarde en aucun cas comme négatives; en d'autres termes, les proportions ci-dessus nous sont d'abord données dans l'hypothèse ou $P_1 N_1$, etc. représentent les *valeurs absolues* des coordonnées des points N_1, etc. Mais, en déterminant les signes des rapports « $P_1 N_1$ *sur* $O P_1$ », etc., d'après les règles de la division algébrique (n° 46), nous constatons que les mêmes proportions restant vraies quand $P_1 N_1$, $O P_1$, etc. y désignent les ordonnées et abscisses positives ou négatives des points N_1, N_2, etc. : ainsi, sur la figure 35, $P_2 N_2$ et $O P_2$ sont deux longueurs négatives; leur rapport est donc positif et par suite égal en signe comme en grandeur au rapport « $P N_1$ *sur* $O P_1$ ».

Appelons alors *m* la valeur du rapport « $P N_1$ *sur* $O P_1$ » : les rapports $\frac{P_2 N_2}{O P_2}$, $\frac{P_3 N_3}{O P_3}$, etc. seront tou- égaux à *m* quelles que soient les positions des points N_2 N_3, etc. En d'autres termes, le rapport de l'ordonné d'un point quelconque de $U' U$ à l'abscisse du mêm

point est une quantité constante m (qui reste immuable lorsque N_1, N_2, etc. se déplacent sur U′ U).

Désignons par les lettres x_1, x_2, x_3, etc. les abscisses des points N_1, N_2, N_3, etc. et par u_1, u_2, u_3, etc. leurs ordonnées; appelons, d'autre part, y_1, y_2, y_3, etc. les ordonnées des points correspondants M_1, M_2, M_3, etc. Nous avons, d'après ce qui précède :

$$\frac{u_1}{x_1}=m; \quad \frac{u_2}{x_2}=m; \quad \frac{u_3}{x_3}=m, \text{ etc, et par suite :}$$

$$u_1=mx_1; \quad u_2=mx_2; \quad u_3=mx_3 \text{ etc., d'où résulte :}$$

$$y_1=mx_1+p; \quad y_2=mx_2+p; \quad y_3=mx_3+p, \text{ etc.}$$

Cette dernière suite d'égalités exprime que les coordonnées d'un point quelconque de la droite à étudier Z′ Z *sont liées par une certaine relation qui est la même pour tous les points de* Z′ Z. En d'autres termes : *Si l'on appelle* x *l'abscisse d'un point quelconque* M *de* Z′ Z (je supprime ici le numéro ou indice 1, 2, 3 pour marquer qu'il s'agit, non plus d'un point particulier M_1, M_2 ou M_3, mais bien de *l'un quelconque* de ces points), *l'ordonnée* y *du même point se trouve donnée par la formule*

$$(1) \qquad y=mx+p$$

Semblablement, si l'on connaît l'ordonnée d'un point quelconque M de Z′ Z on en déduira l'abscisse correspondante en se référant à la même formule (elle nous donne : $y-p=mx$; d'où $x=\frac{y-p}{m}$)

La formule ou relation (1), qui permet de calculer y si l'on connaît x, et inversement de calculer x si l'on connaît y, est appelée tout naturellement « *équation* »; c'est, comme on dit, une « équation entre x et y », à laquelle « *satisfont* », d'après ce qui précède, l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de Z′ Z. Réciproquement, on peut démontrer en toute rigueur que, si x et y sont deux quantités réelles quelconques vérifiant ladite équation, le point qui a pour abscisse x et pour ordonnée y est sûrement *situé sur la droite considérée* (*).

Ce double fait nous indique qu'à une droite quelconque (du plan de deux axes X′ X et Y′ Y) correspond une équation (et une seule) de la forme (1) et que réciproquement, à toute équation de la forme (1) correspond une droite (et une seule) du plan. En d'autres termes, *droite du plan* et *équation de la forme* (1) sont deux notions qui se correspondent rigoureusement. L'équation (1) est l'équivalent algébrique exact d'une droite du plan. On dit qu'elle est l' « *équation de la droite* Z′ Z ».

59. De ce seul fait résulte déjà la possibilité de résoudre par l'algèbre un grand nombre de problèmes de géométrie.

Soient deux droites du même plan ayant respectivement pour équations l'équation (1) et l'équation

$$(2) \qquad y = m'x + p'$$

(*) Celle-ci est donc le *lieu géométrique* des points dont les coordonnées vérifient l'équation (1) (sur la notion du *lieu géométrique*, voir n° 22).

Nous les appellerons respectivement la droite (1) et la droite (2).

Le point d'intersection des droites (1) et (2) est un point dont les deux coordonnées doivent satisfaire *à la fois* aux équations (1) et (2) (puisque ce point est à la fois sur la première et sur la seconde droite). Donc, pour déterminer ce point, il suffit de trouver les valeurs de deux inconnues x et y qui satisfont aux deux équations (1) et (2). C'est le problème que nous avons traité au n° 43. La solution est $x = \frac{p' - p}{m - m'}$; $y = \frac{pm' - pm}{m' - m}$, (abscisse et ordonnée du point d'intersection).

Un calcul plus compliqué, mais purement mécanique permet de déterminer, par exemple, l'équation de la bissectrice de l'angle formé par les droites (1) et (2).

Appelons, d'autre part, h et g les coordonnées d'un point A situé sur la droite (1) [quantités telles, par conséquent, que $g = mh + p$]. On démontrera que la *perpendiculaire* à la droite (1) menée par le point A est la droite (*) d'équation :

$$(3) \qquad y = -\frac{x}{m} + \left(\frac{h}{m} + g\right), \text{ etc., etc.}$$

Remarquons d'ailleurs, en passant, que l'équation d'une

(*) On voit que cette droite passe bien par le point A, puisque l'équation (3) est satisfaite lorsqu'on y fait $x = h$ et $y = g$.

droite peut s'écrire, si l'on veut, sous d'autres formes que la forme (1). Ainsi toute équation de la forme

$$(4) \qquad ax+by=c,$$

où x et y sont les coordonnées d'un point *variable* et a, b, c des quantités *constantes* données représente une droite. En effet un calcul immédiat montre que l'égalité (4) est équivalente aux suivantes :

$$by=-ax+c;\quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b},$$

dont la dernière, étant de la forme (1), représente une droite.

EQUATIONS DES COURBES.

60. Nous venons de voir comment on peut définir (ou représenter) des droites par des équations et raisonner ensuite sur ces droites en calculant sur les équations. Il nous est loisible d'appliquer la même méthode à d'autres figures plus compliquées.

Soit considéré, par exemple, un cercle, ayant pour centre l'origine et pour rayon une longueur r. Appelons x et y l'abscisse O P et l'ordonnée O Q (ou P M) d'un point quelconque M de la circonférence. Le théorème de Pythagore nous enseigne que $\overline{OP}^2+\overline{PM}^2=\overline{OM}^2$; par conséquent

$$(5) \qquad x^2+y^2=r^2$$

Cette même égalité est satisfaite par les coordonnées de tous les points de la circonférence et n'est satisfaite par les coordonnées d'aucun autre point. C'est l' « équation » de la circonférence considérée.

Plus généralement on démontre que toute équation de la forme

$$(6) \qquad x^2+y^2+kx+ly=r^2,$$

où k, l et r sont des quantités réelles « constantes » (ne variant pas avec x et y), représente une circonférence de rayon r (située dans le plan des axes, mais n'ayant pas son centre à l'origine si k et l ne sont pas tous deux nuls). Pour avoir, par exemple, les intersections de cette circonférence et de la droite Z′Z représentée par l'équation (4) (voir fig. 36), il suffit de déterminer les valeurs de x et y qui satisfont à *la fois* à l'équation (4) et à l'équation (6). Si le problème a une solution, on constate qu'il en a en général deux (il y a deux systèmes de valeurs de x et y qui vérifient les deux équations, ce qui signifie que la droite coupe la circonférence en deux points). Exceptionnellement, les deux solutions peuvent se confondre ; en ce cas, la droite (4), qui touche le cercle (6) en un point unique, est *tangente* à sa circonférence.

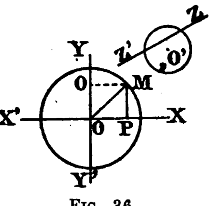


FIG. 36

Considérons maintenant une ellipse ayant son grand axe sur X′X et son petit axe sur la droite Y′Y (celle qui est tracée en trait plein sur la figure 37). Appelons a la

longueur du demi-grand axe (O A sur la figure) et b la longueur du demi-petit axe (O B). On démontre que l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M de l'ellipse satisfont à la relation

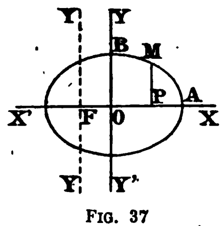


FIG. 37

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

qui est l'équation de l'ellipse.

L'hyperbole de la figure 38, qui admet les axes X'X et Y'Y comme axes de symétrie, a une équation de forme analogue, savoir :

(8) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

FIG. 38

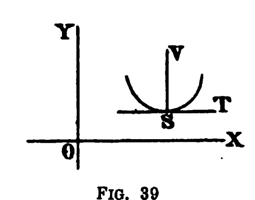


FIG. 39

où a=O A et où b est une autre longueur « constante ». La *parabole* de la figure 39, symétrique par rapport à une droite S V parallèle à Y' Y et tangente à une parallèle S T à l'axe X' X, a pour équation :

(9) $$y = lx^2 + mx + n,$$

l, m et n étant trois quantités « constantes ».

La courbe représentée par la figure (40) a pour équation (*) :

$$(10) \qquad (x^2+y^2)^2=2\,k^2\,(x^2-y^2)$$

où k est une quantité constante. Elle est appelée *lemniscate*.

En combinant ces équations et opérant sur elles divers calculs, on peut déterminer les tangentes des courbes, leurs points d'intersection et en général toutes les lignes ou points remarquables que les anciennes méthodes géométriques nous ont accoutumés à considérer. Et toutes les questions, qui autrefois se résolvaient par des constructions de figures et par l'application des « théorèmes » de la géométrie, seront traitées désormais par les procédés de l'algèbre.

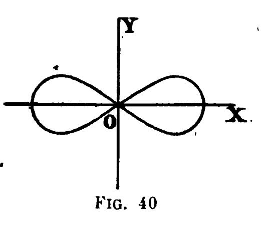


FIG. 40

61. Je ne m'arrêterai pas à détailler tous les artifices, toutes les « opérations » auxquelles on a recours pour faciliter et accélérer les calculs. Ainsi, nous nous sommes servis jusqu'ici, pour définir nos figures d'un système d'axes rectangulaires X′ X et Y′ Y supposé déterminé à l'avance. Rien ne nous force à nous en tenir toujours à cet unique système d'axes. Nous pouvons, au cours d'un problème et pour la commodité de nos calculs, le remplacer par un autre système, c'est-à-dire envisager les « coordonnées » obtenues en projetant les points de notre plan, non plus

(*) L'expression écrite dans le premier nombre de l'équation désigne le *carré* de la somme $x^2 + y^2$.

sur X′X et Y′Y, mais *sur d'autres axes* dont la position (par rapport aux premiers axes) est connue et bien définie. Des formules précises nous montreront comment se transforment les coordonnées d'un point, l'équation d'une droite, l'équation d'une courbe quelconque, lorsqu'on change ainsi le système des axes auxquels on « rapporte » la figure.

Ainsi, par exemple, si, sur la figure 37, sans changer l'axe X′X, nous remplaçons l'axe Y′Y tracé en trait plein par l'axe Y′Y en pointillé qui passe par un *foyer* de l'ellipse (voir n° 26), l'ellipse dont l'équation par rapport aux anciens axes était l'équation (7) aura pour nouvelle équation :

$$\frac{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (11)$$

J'ajoute que l'on peut définir quantitativement la position d'un point dans un plan par d'autres procédés encore. Ainsi, par exemple, si l'on se donne une demi-droite O X, il est clair que la position d'un point M quelconque du plan sera entièrement définie lorsqu'on reconnaîtra, d'une part, la distance r de M au point O (longueur O M positive), et d'autre part l'angle α que fait O M avec O X.

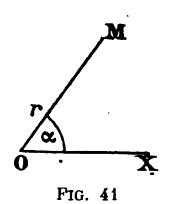


FIG. 41

A tout point M correspond un système de deux quantités r et α et réciproquement. Ces deux quantités sont appelées « coordonnées polaires du point M par rapport

à l'axe polaire O X ». L'emploi de ces coordonnées sera fort avantageux dans certains calculs.

62. C'est, on le voit, toute une géométrie nouvelle que la méthode des « coordonnées » permet de constituer, géométrie extrêmement souple, fertile en ressources, à laquelle on a donné le nom de *géométrie analytique.* Il n'est pas nécessaire de pratiquer longtemps cette géométrie pour reconnaître les avantages qu'elle présente par rapport aux méthodes anciennes. Dans la géométrie ordinaire, il faut, pour établir de nouvelles propriétés, déployer une ingéniosité continuelle, faire un effort d'invention incessant, et encore n'est-on nullement sûr d'arriver jamais au résultat. C'est là un inconvénient que nous avons déjà signalé plus haut et qui ne sera contesté par aucun de ceux qui se sont exercés dans leur jeunesse à la démonstration euclidienne. Au contraire, la géométrie analytique, en ramenant l'étude des propriétés des figures à un maniement de formules et à la résolution d'équations, prend le caractère d'une science automatique. Les calculs à effectuer sont plus ou moins longs, plus ou moins pénibles ; mais ils n'exigent, chez celui qui les opère, aucune initiative difficile. C'est à ce caractère, nous l'avons dit, qu'on reconnaît d'une manière générale la méthode algébrique. Grâce à l'emploi des coordonnées, tous les bénéfices de celle-ci se trouveront transportés en géométrie.

63. C'est aux résultats obtenus que l'on jugera les mérites de la géométrie analytique. Il est cependant intéressant de se demander si la fécondité de cette méthode ne pourrait pas être reconnue *a priori*, si son mérite ne

tient pas à certaines raisons fondamentales? En analysant de près les procédés indiqués plus haut, nous constations qu'en effet ils sont caractérisés par le rôle qu'y joue une notion d'une grande généralité, très riche, très suggestive, la plus importante peut-être de toutes les notions mathématiques : la notion de *relation fonctionnelle* ou de *fonction d'une variable.*

LA NOTION DE FONCTION.

64. Revenons à la définition de la droite Z′Z du n° 58 par l'équation $y=mp+p$. Cette définition a au fond la signification suivante : *Lorsque l'abscisse* x *varie de façon que le point* M *décrive la droite* Z′Z, *l'abscisse* y *varie de son côté en restant liée à* x *par une certaine loi.* En d'autres termes, la valeur prise par la quantité variable y *dépend* de celle de la « variable x ». Et c'est précisément la nature de cette dépendance que l'on fait connaître lorsque l'on écrit l'égalité $y=mx+p$.

Ainsi l'on peut dire que la droite Z′Z *définit* une loi de correspondance entre x et y (savoir la loi exprimée par $y=mx+p$), et qu'inversement cette loi *définit* la droite Z′Z. Et l'on signale l'existence de ladite loi en disant que y est « *fonction* » *de la variable* x : entendons par là que l'on peut régler comme on veut la variation de x (x est « variable indépendante ») et qu'alors la façon dont varie y se trouve être fixée *ipso facto* (y est « variable dépendante »).

Supposons en particulier que le point P (fig. 34) parcoure l'axe X′X d'une course continue en allant de la gauche vers la droite. Il part *de l'infini* à gauche, se rapproche de l'origine, la dépasse, puis s'éloigne vers

l'infini à droite. Dans ces conditions l'absc tant d'une valeur négative infiniment granc proche de la valeur 0, puis devient positive et che progressivement d'une valeur positive grande. On indiquera que la variation de x s cette manière en disant que x « *varie* (*avec co moins l'infini à plus l'infini* ». A supposer, varie ainsi, l'égalité $y = mx + p$ nous montrer tement comment varie de son côté la fonct relative à la droite Z′ Z.

65. Ce que nous venons de dire de la nous pourrions évidemment le répéter à prop les courbes étudiées en géométrie. A chaque respond une fonction exprimée en termes algél Inversement toute fonction de la variable x, une égalité algébrique, peut être « *représen quement* » par une courbe. D'ailleurs il po que cette dernière ne soit aucune des courl en géométrie élémentaire, mais bien une velle, à laquelle la fonction considérée serv nition. Ainsi, l'expression (**) *sin x* (voir n°

(*) Il se peut d'ailleurs que l'équation de la courbe directement la valeur de y en fonction de x. C'es exemple, pour l'équation (5) du cercle. Mais on peu transformer cette dernière en remarquant qu'elle équ

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

(**) Nous avons défini au n° 50 le *sinus* et le quantité. Nos définitions tiennent naturellement si la c lée t au chapitre IV, est désignée par x.

fonction de x [car, si l'on pose $y=sin\ x$, à toute valeur de x correspond une valeur de y (la valeur du *sinus* de la quantité x)]. Cette fonction sera représentée par une courbe nouvelle, appelée *sinusoïde*, dont la forme est indiquée par la figure ci-contre (*). La sinusoïde se compose d'une série de boucles égales entre elles, ainsi qu'il était facile de le prévoir : en effet, quel que soit x, on a, d'après la formule (6) du n° 51, où l'on remplace t par x, $sin\ (2\pi+x) = sin\ x$; de même $sin\ (4\pi + x) = sin\ (2\pi+x) = sin\ x$, etc.; la fonction $sin\ x$, après être passée par une série de valeurs pour x variant de 0 à 2π, repasse par la même série de valeurs pour x variant de 2π à $4\ \pi$, puis encore pour x variant de 4π à 6π, etc.

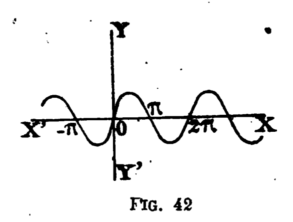


FIG. 42

D'une manière générale, en résumé, définir une courbe par une équation, c'est la définir par une fonction. Que cette manière d'interpréter les figures soit avantageuse et conduise tout droit à la découverte des propriétés géométriques les plus intéressantes, nous ne saurions en être surpris. Ne trouvons-nous pas partout, dans la science, de nombreuses questions où l'idée générale de fonction joue un rôle tout à fait fondamental? La hauteur de la colonne de mercure dans un baromètre dépend de l'altitude du lieu où est placé l'instrument; cela veut dire que cette hauteur barométrique est « fonction de l'alti-

(*) On remarquera que la courbe doit couper l'axe X'X pour $x = 0$, pour $x = \pi$, pour $x = 2\pi$; car on a $sin\ 0 = 0$, de même $sin\ \pi = 0$, de même $sin\ 2\pi = 0$.

tude ». Le volume d'une masse de gaz à pression constante varie avec la température : ce volume est « fonction » de la température. Et ainsi de suite. De ces exemples, bien entendu, nous ne devons pas conclure que, si la notion de fonction est féconde en mathématiques, c'est parce qu'elle se trouve correspondre à des réalités physiques. Mais plutôt il faut admettre qu'elle dérive d'une forme de pensée très naturelle à notre intelligence, qui s'applique aux choses des mathématiques comme aux choses de la physique.

66. Le long d'une droite ou courbe déterminée, avons-nous dit, — c'est-à-dire en tous les points de cette courbe — l'ordonnée est une certaine fonction déterminée de l'abscisse. Il est clair qu'au lieu de considérer y comme fonction de x, nous pourrions aussi considérer x comme fonction de y. En d'autres termes, lorsque deux variables sont fonctions l'une de l'autre, nous avons le droit de choisir celle que nous prendrons comme variable indépendante. Ainsi l'égalité $x^2+y^2=r^2$, qui définit y comme fonction de x (on a $y=\sqrt{r^2-x^2}$), définit également x comme fonction de y (on a $x=\sqrt{r^2-y^2}$).

Nous pouvons aussi nous placer pour étudier la relation de x et y à un point de vue légèrement différent.

Supposons que x et y soient deux fonctions d'une troisième variable, t, qui sera la variable indépendante. Nous servant d'une notation très usitée nous exprimerons fait par les égalités symboliques :

$$2) \qquad x=f(t)\ ;\ y=\varphi(t)$$

où f (t) et φ (t) tiennent lieu d'expressions algébriques quelconques contenant la variable t et des quantités connues. A chaque valeur de t correspond, d'après les égalités (12), un couple de valeurs de x et y, donc un point M du plan (d'abscisse x, d'ordonnée y). Supposons alors que t « varie de moins l'infini à plus l'infini » de la manière indiquée au n° 64. Le point M, pendant ce temps, décrira une certaine *courbe*. Nous dirons que cette courbe est « définie » par les deux fonctions f et φ.

Cette façon de définir les courbes par deux fonctions d'une variable auxiliaire t retint spécialement l'attention des géomètres à la fin du XVIIe siècle. Elle s'introduit en effet très naturellement dans l'étude des problèmes de mécanique auxquels s'attachait Newton. Supposons que t représente le *temps*, et considérons sa variation depuis O (instant envisagé comme initial) jusqu'à *plus l'infini* (temps infiniment éloigné). Dire qu'à chaque valeur de t correspond un point M du plan (de coordonnées x et y), c'est dire qu'à chaque instant du temps correspond une position M d'un certain point mobile (qui se meut suivant une certaine loi à mesure que le temps s'écoule) ; et dire que, lorsque t varie à partir du jour et de l'heure O, le point M décrit une certaine courbe, c'est dire que notre point mobile parcourt une certaine « trajectoire ». Les deux fonctions $x=f(t)$ et $y=\varphi(t)$ qui définissent les variations de x et y « en fonction du temps » font connaître les *conditions du mouvement*. Et, selon les principes admis par Newton, ce sont ces conditions du mouvement qui doivent déterminer la forme, la grandeur et la position de la trajectoire. Toute courbe susceptible d'être la trajectoire d'un mobile se trouve

ainsi naturellement définie par deux fonctions du temps.

Nous trouvons un exemple classique de ces remarques dans la théorie newtonienne relative au mouvement de la terre. Kepler a montré que la terre en une année décrit une courbe fermée dans un plan passant par le soleil. Choisissant dans ce plan un système convenable d'axes X′X et Y′Y ayant pour « origine » le soleil, Newton constate que, lorsque le temps t varie de 0 jour à 365 jours, les coordonnées x et y de la terre sont deux fonctions du temps, $f(t)$ et $\varphi(t)$, liées entre elles par la relation

$$(13) \qquad \frac{(f(t) - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2} + \frac{(\varphi(t))^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont deux quantités constantes (qui ne varient pas avec le temps). De ces égalités on déduit que x et y vérifient l'équation (11) du n° 61, donc que la « trajectoire » de la terre est une ellipse ayant pour foyer le soleil.

[D]ÉRIVÉES.

67. Nous compléterons ce chapitre en définissant encore une notion fondamentale, intimement liée d'ailleurs à la notion de fonction et aux considérations qui permettent de définir une courbe par une équation.

Chacun sait que, lorsqu'on veut étudier l'allure et les propriétés d'une courbe, il est fort utile de considérer les droites *tangentes* à cette courbe. La position de la tangente en un point quelconque M de la courbe définit en effet la direction de la courbe au voisinage de ce

point. D'ailleurs, pour préciser cette direction, il sera bon d'envisager non seulement la position de la tangente, mais aussi son *sens;* et ce sens, on pourra le définir de la façon suivante : Supposons que nous mouvions M sur notre courbe dans un sens tel que son abscisse O P aille en croissant (sens de M vers M_2 sur la figure 43) ;

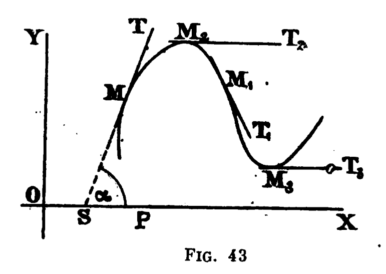


FIG. 43

nous conviendrons de dire que la direction de la tangente au point M est la direction de la droite M T parcourue de M vers M_2.. De cette convention résultent aussitôt diverses remarques importantes relatives à la variation de l'abscisse (O P) du point M et de son ordonnée (P M) (fig. 34). On voit que si la tangente en M est dirigée vers le haut, la courbe monte à partir de M; donc, tandis que l'abscisse augmente (le point P se déplaçant vers la droite), l'ordonnée augmente aussi. Si, au contraire, la tangente était dirigée vers le bas, comme il arrive au point M_1 de la figure, la courbe descendrait, et l'ordonnée diminuerait tandis que l'abscisse augmente. Quand la tangente est horizontale comme au point M_2 ou M_3, l'ordonnée passe par un *maximum* (cas du point M_2) ou par un *minimum* (ca

du point M_3). Pour ces raisons, et pour beaucoup d'autres, il est fort désirable d'avoir un procédé régulier permettant de déterminer, en un point quelconque d'une courbe quelconque, la tangente correspondante M T.

68. Dans ce but, prolongeons TM jusqu'à sa rencontre en S avec l'axe X'X et appelons α l'angle XST ou, plus précisément, sa mesure. On voit que la droite M T sera entièrement déterminée en position et direction si nous connaissons : 1° *les coordonnées* x *et* y de M (donnant la position de M) ; 2° *l'angle* α. D'ailleurs les formules de la trigonométrie dont nous avons donné un aperçu aux n°s 50-51, montrent qu'au lieu de connaître directement l'*angle* α il revient au même de connaître le rapport (*) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (voir à la fin du n° 51 le sens qu'il faut donner aux mots *sinus* et *cosinus* d'un angle). Ce rapport de deux quantités algébriques (réelles) est lui-même une quantité algébrique positive ou négative; nous l'appellerons « *pente* » de la tangente M T.

Cela dit supposons que le point M décrive une courbe (parcoure d'une course continue une courbe telle que celle de la figure 43). En chaque point M, avons-nous dit, nous avons trois éléments à considérer : les deux *coordonnées* x et y et la *pente*. Or, le long de la courbe, y est une fonction de x, et d'autre part, si l'on connaît la courbe (c'est-à-dire la fonction y de x), la tan-

(*) Ce rapport est appelé en trigonométrie « tangente de α » (voir n° 51). Nous évitons ici cette expression afin de ne pas employer simultanément le mot tangente dans deux sens différents.

gente M T, et par suite sa pente en un point M donné, seront déterminées; en d'autres termes, dès que x est donné, la valeur de y s'ensuit et aussi la valeur de la pente; d'ailleurs ces deux valeurs varient quand x varie; donc la *pente* est, comme y, une « fonction de x ».

Conformément à une notation consacrée, nous désignerons la « pente au point M » par la lettre accentuée y', et lorsque nous représenterons par le symbole $f(x)$ la fonction qui définit la courbe, nous appellerons de même $f'(x)$, avec un accent, la fonction qui définit la pente.

69. Entre les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ [ordonnée et pente] il y a une corrélation manifeste (puisque, dès que la première est donnée, la seconde est aussi donnée). On peut mettre cette corrélation en évidence en faisant appel à des considérations algébriques qui ont été développées, au XVII[e] siècle, par Pascal et Fermat d'abord, par Leibniz et Newton ensuite.

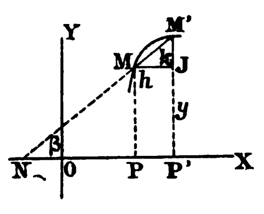


FIG. 44

Soit, sur la courbe, un point M′ voisin du point M (fig. 44). La droite MM′ est voisine de la tangente M T et s'en rapproche d'autant plus que M′, sur la courbe, est plus près de M : on précise ce fait en disant que la tangente M T est la *position-limite* vers laquelle tend la droite MM′ lorsque le point M′, décrivant la courbe, se rapproche indéfiniment du point M (que l'on suppose ici rester fixe).

Il suit de là que la *pente* de la droite MM′ (rap-

port $\frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ ou β est l'angle M N X de la figure 44) est très voisine de la pente de M T quand M′ est très voisin de M. Menons alors par M la parallèle à X′ X, et par M′ la parallèle à Y′Y, droites qui se coupent en J. D'après un théorème classique (n° 17) l'angle β est égal à l'angle M′ MJ, et l'on peut démontrer de plus que le rapport $\frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ est égal au rapport $\frac{\text{J M}'}{\text{M J}}$. Mais qu'est-ce que les longueurs J M′, et M J? La première est égale à la *différence des ordonnées* (P′ M′ et P M) des points M et M′, la seconde à *la différence des abscisses* des mêmes points (O P′ et O P). D'où la règle suivante : « *Faisons le rapport de la différence des ordonnées à la différence des abscisses de deux points voisins de la courbe* M′ *et* M; *nous obtenons la pente de la droite* M M′; *lorsque* M′ *se rapproche indéfiniment de* M, *la pente ainsi calculée devient la pente de la tangente* MT ». Une analyse plus détaillée montrerait que cette règle est valable lors même que la différence d'ordonnées ou la différence d'abscisses considérée est une quantité négative (la fig. 44 représente le cas simple où les deux différences sont positives).

70. Etant donné que l'ordonnée y est fonction de l'abscisse x, on peut présenter autrement la règle ci-dessus. Lorsque l'on passe du point M au point M′, l'abscisse subit une certaine variation h que j'appelle *accroissement* (l'accroissement peut d'ailleurs être négatif) ; en d'autres termes, de x qu'elle était, elle devient $x+h$ (abscisse du point M′). D'ailleurs, quand l'abscisse passe de x à

$x+h$, l'ordonnée de son côté passe de la valeur y à une valeur $y+k$; elle subit donc un accroissement k (qui peut être négatif). La pente de la droite M M', est le rapport $\frac{k}{h}$ des deux accroissements, et la pente de la tangente est la *limite vers laquelle tend ce rapport* quand M' se rapproche de plus en plus de M, par conséquent, *quand* h *devient de plus en plus petit.*

Ce nouvel énoncé, un peu énigmatique au premier abord, devient très clair lorsqu'on l'interprète par quelques exemples.

Considérons la fonction $y=lx^2+mx+n$, qui représente une parabole (n° 60). Lorsque l'abscisse subit l'accroissement h et devient $x+h$, l'ordonnée devient : $l(x+h)^2+m(x+h)+n$, c'est-à-dire (*) $lx^2+mx+n+2lxh+lh^2+mh$. Donc (puisque $y=lx^2+mx+n$), l'accroissement k que subit l'ordonnée est $2lxh+mh+lh^2$. Le rapport $\frac{k}{h}$ (obtenu en divisant k par h) est égal à $2lx+m+lh$. Et l'on voit que, lorsque h devient de plus en plus petit, ce rapport se rapproche de plus en plus de la valeur $2lx+m$. Cette valeur est celle de la pente de la tangente MT au point M de la parabole qui a pour abscisse x.

Considérons pareillement la fonction $y=\sqrt{x^2+1}$, qui représente une hyperbole [en effet, en élevant au carré les deux membres de l'égalité, nous en déduisons $y^2=x^2-1$ ou $x^2-y^2=1$; c'est l'équation (8) de l'hyperbole (voir

(*) Je remplace $(x+h)^2$ par $x^2+2hx+h^2$ (identité (2) du n° 40), et je change l'ordre des termes de la somme.

n° 60) pour laquelle $a=1$, $b=1$]. Lorsque l'abscisse devient $x+h$, l'ordonnée subit l'accroissement

$$k=\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}.$$

Je remarque que, d'après (*) l'identité (1) du n° 40, j'ai toujours :

$$\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$=(x+h)^2+1-x^2-1$$

Remplaçant dans le second membre $(x+h)^2$ par (**) x^2+2h+h^2, supprimant les termes qui sont à la fois ajoutés et retranchés, et divisant les deux membres par $\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)$, ce qui ne détruit pas l'égalité, j'ai :

$$k=\frac{2hx}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{et } \frac{k}{h}=\frac{2x}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}},$$

Lorsque h devient de plus en plus petit, ce dernier rapport se rapproche de plus en plus de la valeur

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}} \text{ ou } \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(*) J'utilise cette identité en y faisant $a=\sqrt{(x+h)^2+1}$ et $b=\sqrt{x^2+1}$; les carrés de ces racines carrées sont naturellement les quantités figurant sous le signe $\sqrt{\ }$.

(**) Identité (2) du n° 40.

C'est la valeur de la pente de la tangente au point de l'hyperbole qui a pour abscisse x.

71. Il serait facile de multiplier les exemples analogues. D'une manière générale on constate que, par une suite d'opérations assez faciles, on peut toujours calculer les pentes des tangentes relatives à une courbe ou fonction quelconque de l'algèbre. En d'autres termes, des procédés algébriques simples permettent de *faire correspondre à toute fonction* $f(x)$ *une autre fonction*, que (suivant la notation indiquée au n° 68) nous désignerons par $f'(x)$, et qui représente la pente de la tangente. Pour indiquer que l'on a affaire ici à un type général de correspondance entre une fonction $f(x)$ et une autre fonction, on dit que la *fonction* $f'(x)$ (pente de la tangente) est *la dérivée* de $f(x)$, et qu'inversement $f(x)$ est la *fonction primitive* de $f'(x)$. On dit aussi que $f(x)$ est une fonction *intégrale*, définie par l'*intégration* de la fonction $f'(x)$, tandis que $f'(x)$ est définie par la *dérivation* ou *différentiation* de $f(x)$.

72. Le calcul des dérivées dépend d'un ensemble de règles qui constitue un nouveau chapitre de l'algèbre (tout comme le calcul des logarithmes, ou le calcul trigonométrique). Voici les plus simples de ces règles, par lesquelles on pourra se faire une idée des autres (toutes les règles peuvent être justifiées par des démonstrations rigoureuses) :

La dérivée d'une somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.

La dérivée d'une quantité constante est 0 (en effet, si

y ne varie pas quand x varie, son accroissement k est toujours nul et le rapport $\frac{k}{h}$ est nul quel que soit h).

La dérivée du produit d'une quantité constante a par une fonction $f(x)$ est égale au produit de a par la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ [en effet, quand $f(x)$ subit l'accroissement k, le produit $af(x)$ subit l'accroissement ak].

La dérivée de la fonction $y=x^2$ est égale à $2x$. La *dérivée* de x^3 est *égale* à $3x^2$. La *dérivée* de x^4 est *égale* à $4x^3$, et *ainsi de suite.*

En utilisant ces diverses règles, on obtient immédiatement les dérivées des sommes (que l'on appelle en algèbre *polynomes en* x) telles que $y=3x^4-5x^3-3x^2+2x+1$. La dérivée est ici (*) $y'=3\times4x^3-5\times3x^2-3\times2x+2$ ou $y'=12x^3-15x^2-6x+2$.

On a, d'autre part, les règles suivantes : *La dérivée de la fonction $\frac{1}{x}$ est égale à $-\frac{1}{x^2}$. La dérivée de* $y=\sqrt{x}$ est égale à $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. La *dérivée de la fonction* (1) $y=sin\ x$ est la fonction $y'=cos\ x$. La *dérivée de la fonction* $y=cos\ x$ *est* $y'=-sin\ x$, etc., etc.

73. Le calcul des dérivées sert à de très nombreux usages. L'une des applications les plus connues de ce calcul est celle qui a trait à l'étude du « sens de la variation des fonctions ».

Reportons-nous à la définition de la *pente* de la tangente, au n° 68. En étudiant les signes de *sin* α et *cos* α,

(*) La dérivée de x (rapport de l'accroissement de x à lui-même) est évidemment 1. Donc la dérivée de $2x$ est 2.

on reconnaît très facilement que, quand la tangente MT est dirigée vers le haut (*voir* fig. 43), la pente est positive; quand la tangente est dérigée vers le bas, la pente est négative; quand la tangente est horizontale, la pente est nulle. Dès lors les remarques que nous avons faites à la fin du n° 67 peuvent être formulées dans les termes suivants : « *Si la dérivée* f'(x) *est positive, la fonction* f(x) *varie dans le même sens que la variable indépendante* x; *si elle èst négative, la fonction et la variable varient en sens contraires; si la fonction passe par un maximum ou un minimum, la dérivée est nulle.* »

Nous verrons dans le prochain chapitre d'autres applications plus importantes du calcul des dérivées.

CHAPITRE VI

Les équations différentielles

74. Dans les premiers temps de l'algèbre, on pensait que l'objet suprême de cette science était la résolution des équations, c'est-à-dire le calcul des quantités inconnues vérifiant certaines égalités (voir n° 41). On s'est aperçu plus tard que le problème des équations n'est qu'un cas particulier d'un autre problème beaucoup plus général et d'un intérêt tout différent; en effet, c'est surtout pour satisfaire des besoins pratiques que l'on s'est trouvé amené à résoudre des équations; au contraire le nouveau problème dont nous allons parler permet de découvrir des propriétés, des lois, qui nous font pénétrer au cœur de la vérité mathématique et qui serviront de base à des conceptions théoriques fondamentales.

Le problème très général auquel nous faisons allusion a pour objet *l'étude des propriétés des fonctions qui satisfont à certaines conditions données.* D'ailleurs les conditions données constituent déjà des « propriétés », en sorte que notre problème revient au suivant : « Comme conséquence du fait qu'une fonction jouit de certaines

propriétés, quelles sont les autres propriétés, corrélatives, qu'elle devra posséder en même temps? » Ajoutons que les conditions du problème sont supposées exprimées par des formules algébriques. La méthode à suivre pour avoir la solution consistera donc à opérer des calculs sur des formules, afin d'en tirer des conséquences.

75. Eclairons tout de suite ces remarques par un exemple. Partons d'une égalité, dont le premier membre contient x, y et des quantités connues constantes, et dont le second membre est 0. On peut se proposer d'étudier la ou les fonctions y *de* x qui satisfont à une telle égalité. C'est ainsi que l'égalité $x^2+y^2=r^2$ (équation d'un cercle, voir n° 60) définit une fonction y de x — très élémentaire et facile à étudier, celle-là — dont l'expression peut s'écrire (*) $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (comparer n° 66).

Lorsque l'on envisage une relation d'égalité plus compliquée, comme par exemple :

$$(1) \qquad x^4+ax^3y^3+by^5+c=0$$

où a, b, c sont des quantités connues, il se peut qu'on ne sache pas écrire d'emblée à quoi la quantité y doit être égale pour que la relation soit satisfaite; cependant une égalité telle que (*) indique toujours l'existence d'une certaine loi de correspondance entre x et y; en d'autres

(*) Pour être tout à fait précis, nous devons dire que l'*égalité* $x^2+y^2=r^2$ définit deux fonctions de x, savoir $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ et $y=-\sqrt{r^2-x^2}$, car, l'une ou l'autre de ces dernières égalités donne, en élevant un carré, $y^2=r^2-x^2$.

termes, y est, en vertu de cette égalité, une certaine « fonction de x » dont on peut rechercher les propriétés. On remarquera que le problème ainsi posé est la généralisation immédiate du problème plus particulier relatif à la résolution d'une équation à une inconnue. Dans l'équation (1), en effet, regardons x comme une quantité connue et y comme l'inconnue : la résolution de l'équation donnera la valeur de y correspondant à une valeur quelconque de x. En d'autres termes, pour connaître la fonction y de x envisagée, il suffit de savoir résoudre (*) l'équation (1) [par rapport à l'inconnue y] *pour toutes les valeurs de* x.

Lorsqu'une fonction inconnue est déterminée par une égalité telle que (1), on dit qu'elle est définie *implicitement* (ou « par une *relation implicite* »). Le problème que l'on se pose consiste à exprimer et à étudier « *explicitement* » ladite fonction y.

76. Il se présente en mathématiques bien des manières de définir une fonction inconnue par des conditions algébriques.

Pour prendre un nouvel exemple, proposons-nous de trouver une fonction $f(x)$ telle que, si l'on appelle x_1 et x_2 deux valeurs particulières quelconques de x, on ait toujours :

$$(2) \qquad f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)\,;$$

(*) Je signale en passant que c'est là une résolution d'équation que l'algèbre élémentaire ne sait effectuer que d'une manière approchée : la présence de y^5, cinquième puissance de y, rend le problème extrêmement complexe.

en d'autres termes, la valeur prise par la fonction pour $x=x_1+x_2$ doit toujours être égale à la somme des valeurs qu'elle prend pour $x=x_1$ et pour $x=x_2$. On constate qu'une solution du problème est la fonction ax, où a est une quantité constante quelconque. En effet, si l'on pose $f(x)=ax$, on aura $f(x_1)=ax_1$ et $f(x_2)=ax_2$ et, d'autre part, $f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)=ax_1+ax_2$. Donc l'égalité (2) sera bien vérifiée. On donne à l'égalité (2) le nom d' « *équation fonctionnelle définissant une fonction inconnue de* x ».

Nous aurions beaucoup à dire sur les équations fonctionnelles. Mais c'est en faisant intervenir le calcul des dérivées que l'on obtient, dans l'ordre d'idées indiqué, les problèmes les plus remarquables, ceux qui conduisent aux résultats les plus nouveaux et qui sont le plus riches en conséquences.

Appelant toujours x la variable indépendante, désignons par y une fonction inconnue de x et par y' sa dérivée (voir pour cette notation le n° 68) qui elle-même est, comme nous savons, une fonction de x. Par rapport à x les deux quantités corrélatives y et y' sont des « variables dépendantes ». En particulier, il pourra arriver que les trois variables x, y et y' soient liées par une certaine relation (ou égalité algébrique). Cette relation constitue alors une *condition* à laquelle la fonction inconnue y est tenue de satisfaire et d'où l'on peut essayer de tirer, par le calcul, une expression explicite et diverses propriétés de ladite fonction. On appelle une telle relation « *équation différentielle* », afin d'indiquer qu'elle fait intervenir une dérivée (voir n° 71).

Exemples. — Soit à trouver les fonctions y de

x satisfaisant à la relation ou *équation différentielle :*

(3) $$y' = \frac{2(y-3)}{x}$$

que nous nous donnons *a priori*. Nous vérifions sans peine que, quelle que soit la quantité constante c (indépendante de x), la fonction $y=cx^2+3$ et sa dérivée satisfont à la relation (3) [en effet, la dérivée de cx^2+3 est $2cx$; or, si $y=cx^2+3$, la fraction $\frac{2(y-3)}{x}$ se réduit à $\frac{2cx^2}{x}$ ou $2cx$]. Inversement, on peut démontrer que les *seules* fonctions de x qui (avec leurs dérivées) vérifient l'égalité (3), sont les fonctions obtenues en donnant à c *toutes les valeurs possibles* dans l'expression $y=cx^2+3$. Nous dirons donc que l'ensemble de ces fonctions constituent les « solutions » de l'équation différentielle (3).

Soit proposée pareillement l'équation différentielle

(4) $$y' = \frac{x}{y}$$

Je constate que, quelle que soit la valeur de la constante c, la fonction $y=\sqrt{x^2-c}$ satisfait à cette équation [en effet un calcul semblable à celui du n° 70 montre que la dérivée de $\sqrt{x^2-c}$ est $\frac{x}{\sqrt{x^2-c}}$; elle est donc égale à $\frac{x}{y}$].

77. Donc, d'une manière générale, nous appellerons *équation différentielle* toute égalité algébrique — équation — contenant la variable indépendante, une fonction inconnue et sa dérivée (*) et autant de quantités connues (constantes) que l'on voudra. Une relation contenant plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées sera également appelée équation différentielle, mais à elle seule elle ne suffira pas à définir les fonctions inconnues; en général, il faudra, pour que celles-ci soient *toutes* déterminées par les conditions du problème, que l'on ait autant d'équations différentielles qu'il y a de fonctions inconnues. Ainsi, par exemple, la recherche de deux fonctions inconnues y et z satisfaisant avec leurs dérivées y' et z' aux deux équations différentielles

$$\begin{cases} y' = \dfrac{z}{x} - 1 \\[2ex] z' = \dfrac{y}{x} + 1 \end{cases}$$

est un problème qui a un sens précis et comporte des solutions déterminées. Les équations sont notamment satisfaites (le lecteur le vérifiera sans peine) par le couple de fonctions $y = \dfrac{1}{x}$ et $z = x - \dfrac{1}{x}$.

78. La dérivée y' d'une fonction y de x est, nous l'avons vu, une fonction de x. A ce titre elle a elle-même une dérivée (fonction de x dite « *dérivée seconde*

(*) Dans certains cas, ces trois éléments ne figureront pas tous explicitement dans l'équation différentielle.

de y) que je désigne par y''. On peut imaginer qu'une fonction inconnue y soit définie par une relation contenant non seulement x, y, y' et des quantités constantes, mais aussi y''. Une telle relation sera dite « équation différentielle du second ordre ». Résoudre l'équation, ce sera ici encore, trouver les fonctions y qui y satisfont. Ainsi, par exemple, on vérifie facilement que l'équation différentielle

$$x^2y''=2xy'-2y$$

admet pour solution (*) la fonction $y=ax^2+bx$, quelles que soient les valeurs données aux quantités constantes a et b.

Plus généralement, il peut arriver que deux fonctions inconnues soient définies par deux équations différentielles du second ordre contenant ces fonctions, leurs dérivées et leurs dérivées « secondes ».

Et l'on peut imaginer des équations différentielles plus compliquées encore.

79. L'étude des équations différentielles fournit la clef de nombreux problèmes mathématiques. Toute notre mécanique, notamment, et par suite une grande partie de notre physique, reposent sur cette étude, et c'est pourquoi les équations différentielles occupent une place d'honneur dans le système de calcul mathématique institué par Newton et ses successeurs.

Il est facile de voir qu'en effet la notion de *dérivée* est

(*) Si, en effet, $y=ax^2+bx$, on a $y'=2ax+b$ et $y''=2a$, et par suite : $2ax^2=2x(2ax+b)-2ax^2-2bx$.

très intimement liée aux idées et aux principes fondamentaux de la science du mouvement.

Considérons un *point matériel* mobile sur l'axe Y'Y et supposons que pendant un certain intervalle de temps, soit entre l'heure t et l'heure $t+h$, ce point mobile parcoure un intervalle MM', c'est-à-dire aille d'un point M d'ordonnée y *à un point M'* d'ordonnée $y+k$. On appelle communément « vitesse du mobile pendant l'intervalle de temps h » le rapport $\frac{k}{h}$ de l'espace parcouru au temps du parcours. Mais, si l'intervalle de temps a une certaine étendue, rien ne dit que le mouvement du mobile ne soit pas très irrégulier entre M et M', auquel cas la connaissance du rapport $\frac{h}{k}$ ne nous renseignera que très grossièrement sur la véritable allure du mobile (ce rapport définit seulement l'allure *moyenne* du mobile). Pour que la notion de vitesse devienne applicable à des mouvements irréguliers, il faut que les intervalles de temps servant à la définir soient *extrêmement petits*. Supposons, plus précisément, que nous considérions à partir de l'heure t un intervalle de temps (heure t à heure $t+h$) de plus en plus petit; lorsque cet intervalle se rapproche indéfiniment d'un intervalle nul, le rapport $\frac{k}{h}$ s'approche, quant à lui, d'une certaine grandeur qu'on appellera *vitesse du mobile « à l'heure* t » ou « *au temps* t ». Ainsi l'on dira, par exemple, qu'un train a, à 14 heures 05, une vitesse de 50 kilomètres à

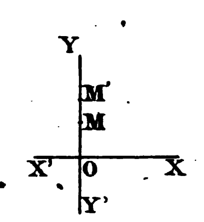


FIG. 45

l'heure; à 14 heures 06 le même train pourra être animé d'une vitesse différente (telle que 40 ou 60 kilomètres à l'heure).

On voit que la *vitesse à l'heure* t, telle que le sens commun nous la fait définir, n'est autre chose que la *dérivée* y' *de l'ordonnée* y *calculée pour la valeur* t *de la variable* [comparer la définition de la dérivée donnée au n° 70]. Cette définition de la vitesse s'impose immédiatement à nous lorsque, nous plaçant au point de vue du n° 66, nous considérons le mouvement comme un déplacement qui s'opère *en fonction du temps*, c'est-à-dire, dans le cas présent, lorsque nous regardons *l'ordonnée* y *comme une fonction* (*) *de la variable* t.

Allons plus loin. L'ensemble des faits physiques que nous connaissons nous conduit à considérer une *force mécanique* s'exerçant sur un point matériel mobile comme un agent qui a le pouvoir de *modifier la vitesse du mobile, quelque court que soit le temps pendant lequel il opère.* En d'autres termes, une force agissant à l'heure t est ce qui produit, dans une certaine direction, et pendant un intervalle de temps h aussi petit que l'on veut (de l'heure t à l'heure $t+h$) une variation, un accroissement de la vitesse. Or nous avons vu au chapitre V que la variation d'une fonction est caractérisée par la pente de la tangente à la courbe correspondante, c'est-à-dire par la *dérivée* (nos 67 et 73). Il est donc naturel de supposer que la force agissant sur un mobile est en relation directe avec la valeur de la *dérivée de la vitesse de ce mobile.* En

(*) Le lecteur est prié de prendre garde au fait que dans ce numéro et les suivants la quantité regardée comme variable indépendante est désignée par t (*le temps*) et non plus par x (cf. n° 66).

particulier dans le cas où le mouvement est rectiligne et se fait sur l'axe Y'Y, on constate que la définition conventionnelle suivante de la force conduit à des conséquences qu'ont confirmées presque exactement toutes les expériences : « *La force est une grandeur proportionnelle à la masse du point matériel mobile* (on peut dire si l'on préfère : *à son poids) et aussi à la dérivée de la vitesse du point, c'est-à-dire à la dérivée de la dérivée de l'ordonnée y* ou « *dérivée seconde de y* » (selon la définition du n° 78, mais la variable indépendante étant ici t au lieu de x). D'ailleurs on donne à la dérivée de la vitesse le nom d'*accélération*, et l'on dit, par conséquent : « La force est proportionnelle à la masse et à l'accélération du point mobile ».

Cette définition, encore une fois, est conventionnelle et approximative, et il paraît même probable aujourd'hui, que nous allons être obligés de l'abandonner; mais toute la mécanique et toute la physique édifiées depuis Newton jusqu'à notre époque sont fondées sur elle.

80. Adoptant donc la définition ci-dessus, supposons que la force qui fait mouvoir notre mobile (sur Y' Y) nous soit *connue*, et qu'elle soit d'ailleurs variable avec l'heure et avec la position du mobile : ladite force est alors une certaine *fonction* connue de l'heure t et de l'ordonnée y, et à cette fonction l'accélération du mobile, ou dérivée seconde y'', est proportionnelle. On a donc l'équation différentielle.

(5) y'' = *expression algébrique contenant t et y*

qui exprime les conditions du mouvement. Pour « ét

dier » le mouvement d'après ces conditions, c'est-à-dire pour calculer la position du mobile (l'ordonnée y) à une heure quelconque, il faut trouver une fonction $y = \varphi(t)$ [*comparer* n° 66] qui satisfasse à l'équation différentielle (5). Ainsi l'étude du mouvement rectiligne d'un point soumis à une force connue se ramène à *la résolution d'une équation différentielle du second ordre* (n° 78).

81. Dans le cas où le mouvement s'effectue, non pas le long d'une droite (telle que Y′ Y) mais sur une courbe quelconque dans un plan, le problème se pose dans des termes un peu plus complexes, mais fort analogues.

Définissons, dans le plan du mouvement, la position d'un point M quelconque par ses coordonnées x et y relatives aux axes X′ X et Y′ Y, l'un horizontal, l'autre vertical. Déterminer le mouvement de M, c'est, comme nous l'avons vu au n° 66, trouver les deux fonctions du temps, $x = f(t)$ et $y = \varphi(t)$, auxquelles x et y sont égales.

Appelons P et Q les projections de M sur X′ X et Y′ Y (voir n° 57 et fig. 34). Lorsque M se meut dans son plan, le point Q est mobile sur l'axe Y′ Y; il a à chaque instant (conformément aux définitions ci-dessus) une certaine vitesse (dérivée y') et une certaine accélération (dérivée seconde y''). De même le point P se meut sur la droite X′ X, en sorte que la longueur O P (abscisse x) est ici une fonction du *temps;* le point P a une vitesse (qui est la dérivée (*) de x, soit x') et

(*) x étant ici une fonction de la variable t, a une dérivée qui se définit exactement comme la dérivée de y.

une accélération (qui est la dérivée seconde de x, soit x''). Nous dirons que la vitesse et l'accélération du point Q sont la *vitesse verticale* et l'*accélération verticale* du point mobile M et que celles du point P en sont la *vitesse horizontale* et l'*accélération horizontale*.

Cela dit, l'analyse des conditions qui caractérisent l'action des forces physiques conduit à admettre les principes que voici : 1° *Toute force agissant sur* M *dans le plan considéré produit un effet équivalent à celui que produiraient deux autres forces s'exerçant sur* M, *l'une verticalement, l'autre horizontalement et proportionnelles, l'une à l'accélération verticale, l'autre à l'accélération horizontale de* M; 2° Les deux forces ainsi définies, dites *composantes* de la force proposée, peuvent être déduites de celle-ci d'après la règle suivante (règle de la *décomposition des forces*) : Supposant la force donnée représentée par une grandeur M F (son intensité) portée à partir de son point d'application sur sa ligne de direction, construisons un *rectangle* de sommet M ayant MF pour diagonale : les côtés MH et MV de ce rectangle (fig. 46) seront les forces composantes cherchées.

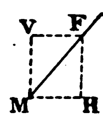


Fig. 46

82. Ces principes admis, supposons connnues la force et ses composantes, et regardons-les comme fonctions de l'heure t et aussi de la position du mobile M (c'est-à-dire des coordonnées x et y). Alors, en raisonnant comme au n° 80, nous pouvons écrire deux équations différentielles :

$$(6) \qquad \begin{cases} x'' = \textit{expression contenant } t, x \textit{ et } y \\ y'' = \textit{expression contenant } t, x \textit{ et } y \end{cases}$$

qui définissent les conditions du mouvement. Les fonctions $x=f(t)$ et $y=\varphi(t)$ que nous recherchons seront des solutions de ces équations. Ici encore, par conséquent, l'étude du mouvement se ramène à l'étude d'équations différentielles, et il en est encore de même dans le cas plus général où le mobile que l'on considère ne se meut pas dans un plan, mais bien sur une ligne courbe quelconque dans l'espace à trois dimensions.

A titre d'exemple, indiquons comment s'écrit dans le langage des équations différentielles le problème du mouvement des planètes étudié par Newton.

FIG. 47

Supposant que toute planète, la terre par exemple, est attirée vers le soleil par une force inversement proportionnelle au carré de la distance, Newton démontre d'abord que la terre circule dans un plan. Dans ce plan prenons pour « origine des coordonnées » le soleil et pour axe X′X la droite qui passe par les points de la trajectoire de la terre qui sont respectivement le plus près et le plus loin du soleil (*périgée* et *apogée*) ; appelons r (cf. n° 61) la distance du soleil à la terre pour une position M quelconque de celle-ci (de coordonnées x et y). Le théorème de Pythagore montre que, *quel* que soit M dans le plan, on a toujours $r^2=x^2+y^2$. D'ailleurs la force qui attire la terre vers le soleil est dirigée suivant M O et, d'après l'hypothèse newtonienne, elle a pour intensité $\frac{k}{r^2}$, la quantité k étant un certain facteur *constant* (indépendant du temps). De la règle de la « décomposition des forces » on déduit alors

facilement que les composantes horizontale et verticale de cette force ont respectivement pour grandeurs $\frac{k}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$ et $\frac{k}{r^2} \cdot \frac{y}{r}$, c'est-à-dire $\frac{kx}{r^3}$ et $\frac{ky}{r^3}$ ou $\frac{kx}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{ky}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ puisque l'on a $r=\sqrt{x^2+y^2}$. En conséquence on obtient comme équations exprimant les conditions de mouvement les deux équations :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} m x'' &= \frac{kx}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ m y'' &= \frac{ky}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned} \right.$$

(m *masse de la terre*)

Ce sont là deux équations différentielles du second ordre, dont la résolution fait connaître les coordonnées x et y sous forme de fonction du temps. On trouve comme résultat un couple de fonctions $x=f(t)$ et $y=\varphi(t)$ satisfaisant à la relation (13) du chapitre V et l'on en déduit (comme nous l'avons montré au n° 66) que la trajectoire de la terre est une ellipse; conclusion qui se trouve d'accord avec les observations astronomiques.

83. Ainsi se présente, en gros, la déduction de Newton. Il n'est pas inutile de signaler que, pour la pousser dans le détail, on est amené à modifier quelque peu la forme algébrique que nous venons de donner au

problème. Usant des ressources que nous offre la technique du calcul, on ne s'attaque pas d'emblée aux équations (7), mais on introduit d'autres équations algébriquement « équivalentes », où figurent d'autres variables (ou inconnues). Ainsi, il est clair que, puisque les coordonnées x et y sont fonctions de temps, la distance r du soleil à la terre, égale à $\sqrt{x^2+y^2}$, est elle-même fonction de t; elle a donc une *dérivée* que nous désignerons par r'. Envisageant cette fonction, on peut démontrer, que, *si* les équations (7) sont satisfaites, — c'est-à-dire : *dans l'hypothèse newtonienne, — la fonction* r *et sa dérivée satisferont à l'équation différentielle suivante* :

$$(8) \qquad r'^2 = \frac{l}{r} - \frac{n}{r^2} - p$$

ou l, n, p sont trois quantités positives constantes (indépendantes de t et de r). Cette équation ne contient plus qu'une fonction inconnue et peut donc être étudiée isolément (cf. n° 76). Elle ne renferme d'ailleurs pas de dérivée seconde, circonstance qui en facilite considérablement la résolution (*).

Dans la nouvelle théorie de la gravitation proposée par Einstein, la distance r du soleil à la terre vérifie une équation différentielle analogue, savoir l'équation :

$$(9) \qquad r'^2 = \frac{l}{r} - \frac{n}{r^2} - p + \frac{q}{r^3}.$$

(*) En fait, d'ailleurs, cette équation elle-même ne sera pas étudiée directement ; on lui substitue encore une autre équation équivalente.

où l, n, p et q sont des constantes. Cette équation, on le voit, ne diffère de celle de Newton que par l'adjonction du terme $\frac{q}{r^3}$ qui (étant donné que r est très grand) est beaucoup plus petit que les autres et dans la pratique négligeable (*). Ainsi s'explique que la trajectoire attribuée à la terre par Einstein ne diffère pas sensiblement de la trajectoire newtorienne. Il faut remarquer toutefois que la variable indépendante, t, (qui ne figure pas explicitement dans les équations (8 ou (9) mais qui intervient dans les conséquences tirées de ces équations) n'est plus pour Einstein le temps de Newton, mais a une signification différente.

84. Ces exemples nous mettent à même d'apprécier les services rendus par les équations différentielles dans les théories astronomiques. Je ne saurais cependant trop répéter que ce ne sont pas des considérations relatives aux problèmes physiques qui fixèrent sur ces équations l'attention des purs analystes. L'étude des équations différentielles soulève bien des questions qui sont purement mathématiques. En particulier, elle nous amène à donner une extension nouvelle et considérable à notre notion primitive de « fonction d'une quantité variable ».

Toutes les équations différentielles que nous avons

(*) Le nombre q se trouve être en effet du même ordre de grandeur que l; par contre r^2 est beaucoup plus grand que r parce que r, distance du soleil à la terre, est très grand; en conséquence $\frac{1}{r^3}$ est beaucoup plus petit que $\frac{1}{r}$ et $\frac{q}{r^3}$ est négligeable par rapport à $\frac{l}{r}$

citées comme exemples dans les pages qui précèdent sont, sans que nous en ayons averti le lecteur, des équations très particulières, très exceptionnelles. Ce sont des équations que nous « savons résoudre, c'est-à-dire qui sont satisfaites par des fonctions de x (ou de t) dont le type, l'expression algébrique, et certaines propriétés tout au moins, nous sont connues d'avance. Or, il n'en sera pas ainsi en général. Si nous écrivons une équation différentielle au hasard, par exemple :

$$y' = x^2 + (x^2+1)\,y + (x-1)\,y^4,$$

il nous sera impossible d'exprimer et d'étudier les « solutions » de cette équation à l'aide des moyens algébriques dont nous disposons. C'est qu'en effet une telle équation « définit » des fonctions radicalement nouvelles — ses solutions —, qui ne peuvent être formées par aucune combinaison de fonctions déjà connues, et qui ne sont reliées à aucune fonction connue par aucun lien connu. Cette difficulté — observons-le en passant — n'est pas particulière aux équations que nous étudions en vue de fins théoriques. Elle se présente également dans les problèmes physiques. Ainsi les équations (7), que nous avons écrites tout à l'heure pour déterminer le mouvement de la terre, ne sont qu'approximativement exactes, même dans l'hypothèse de Newton; et, si l'on veut entrer dans les détails, on n'a pas le droit de s'en contenter. Ces équations supposent en effet que le soleil et la terre sont assimilables à des points et que les attractions exercées sur eux par les autres planètes, par la lune, et *a fortiori* par toutes les étoiles, sont inexistantes ou négligeables. Si,

cependant, précisant l'énoncé du problème, on tient compte de toutes ces attractions ainsi que des dimensions des corps, les équations différentielles (7) se compliquent extrêmement et on ne sait plus les résoudre au moyen de fonctions connues (la trajectoire *exacte*, selon Newton, n'est pas une ellipse).

Cependant, lors même qu'on ne peut les ramener à des données connues les solutions des équations différentielles, néanmoins, existent bel et bien (*). Qu'est-ce que cela veut dire? Les premiers algébristes ont pu éprouver ici quelque surprise, quelque hésitation. Nous ne saurions quant à nous, partager leur embarras.

En effet, nous avons vu déjà comment, à un moment donné, des fonctions irréductibles aux fonctions jusque-là connues sont susceptibles de faire brusquement leur apparition dans la science. Ainsi, tant que nous ne disposions encore que des opérations élémentaires de l'arithmétique, nous n'avions aucun moyen d'exprimer algébriquement les valeurs exactes des fonctions $\sin t$ et $\cos t$. Ces fonctions sont à tous points de vue irréductibles aux fonctions que l'on peut obtenir en combinant des additions, des multiplications, des extractions de racines, etc. Si nous tenons absolument à les calculer au moyen d'opérations élémentaires, nous devons nous contenter de les exprimer avec une certaine approximation (arbitrairement grande d'ailleurs) en utilisant des formules convergentes telles que les « séries » (12) et (13) du n° 54. Pourtant le *sinus* et le *cosinus* sont des êtres mathématiques dont l'existence nous est garantie par des définitions rigoureuses.

(1) Sauf dans des cas très rares.

Semblablement, et pour la même raison, la série (11) du n° 54 définit une fonction de t irréductible à toutes les fonctions de l'algèbre élémentaire.

Ayant ces exemples sous les yeux, comment pourrions-nous trouver étrange que les solutions des équations différentielles soient en général des fonctions irréductibles, non seulement aux fonctions élémentaires de l'algèbre, mais aussi aux fonctions appelées *sinus*, *cosinus*, *logarithme*, et à toutes les autres fonctions déjà étudiées?

Au lieu de nous inquiéter de cette circonstance, félicitons-nous, au contraire, de pouvoir, par l'intermédiaire des équations différentielles, allonger la liste de nos relations dans le monde des fonctions. C'est ainsi que M. Painlevé, en étudiant (entre autres) l'équation différentielle $y''=6y^2+x$, dont les solutions étaient irréductibles à toutes les fonctions connues avant lui, a fait entrer dans la science une nouvelle et fort remarquable *famille* de fonctions.

CHAPITRE VII

La théorie des fonctions

85. En passant en revue, dans les chapitres précédents, quelques-unes des grandes voies où s'est engagée la pensée mathématique depuis l'époque de Platon, nous avons vu ressortir de plus en plus nettement l'importance du rôle joué par la notion de fonction dans les théories les plus diverses. Les *fonctions* sont au monde mathématique ce que les *lois* sont au monde physique. C'est par elle que s'expriment les correspondances, et par conséquent les harmonies des figures et des grandeurs. L'étude des courbes remarquables, telle que la concevaient les anciens, c'est l'analyse de certaines fonctions. Les formules de l'algèbre (où entrent des lettres, c'est-à-dire des quantités pouvant prendre des valeurs variables), ce sont autant d'expressions de certaines quantités algébriques, *fonctions* d'autres quantités. Les logarithmes, les sinus, les cosinus sont des fonctions d'un type particulier. L'étude des équations différentielles repose en fin de compte sur la définition et sur les propriétés de certaines familles de fonctions. Ainsi, à chaque tournant de la science, on voit la fonction reparaître, et c'est pourquoi

l'Analyse moderne a été amenée à constituer une fois pour toutes une théorie systématique des correspondances fonctionnelles. Cherchons à nous faire une petite idée de l'objet de cette théorie, qui est le couronnement de tous les travaux mathématiques dont nous avons parlé au cours de ce livre.

86. Une fonction, c'est en principe une loi de correspondance entre plusieurs quantités — deux au moins — variant simultanément. Partant de cette idée très générale, nous pouvons la préciser de diverses manières. Ainsi nous pouvons supposer que la variable indépendante varie avec continuité *de moins l'infini à plus l'infini* de la manière indiquée au n° 64. Cela revient à considérer x comme une abscisse O P dont l'extrémité P décrit un axe X'X. Si la variable dépendante y (fonction de x) est elle-même toujours réelle, on peut, si l'on veut, la considérer comme l'ordonnée d'un point d'abscisse x, et la fonction y de x est alors représentée par une *courbe* (n° 64 et suivants). Les fonctions qui se prêtent à ce genre de représentation sont d'un type particulièrement intéressant : ce sont elles qui interviennent dans tous les calculs de la géométrie analytique et c'est à elles que nous nous sommes borné dans les deux chapitres qui précèdent. On peut cependant facilement concevoir des types de fonctions différents. Supposons, par exemple, que nous écrivions la suite des nombres premiers en les rangeant par ordre de grandeur : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc, et appelons $f(n)$ le n^e nombre premier dans la suite ainsi écrite. Nous pouvons considérer $f(n)$ comme une fonction de n, — la variable indé-

pendante n variant ici non plus comme tout à l'heure, d'une manière continue, mais d'une manière *discontinue* en prenant la suite des valeurs 1, 2, 3, 5, etc. Pareillement, nous pourrions imaginer des fonctions $f(x)$ qui soient définies et définies seulement pour les valeurs *rationnelles* de x (voir n° 38) ; pour de telles fonctions, la variable indépendante varierait encore de façon *discontinue* (*).

87. Une hypothèse d'une autre nature que l'on peut faire — avec profit — sur la variable x consiste à supposer que celle-ci ne prend pas seulement des valeurs réelles mais aussi des valeurs imaginaires ou complexes (quantités complexes au sens du n° 47). Expliquons-nous. Lorsqu'on introduit dans la science les quantités imaginaires, c'est tout d'abord pour envisager des expressions dépendant de quantités réelles (des « fonctions de quantités réelles » telles que $f(x)$) qui éventuellement cessent d'être réelles. En d'autres termes, on part de données réelles, mais on rencontre, au cours des calculs effectués, certaines fonctions imaginaires que, pour les raisons indiquées au chapitre IV, on juge avantageux de considérer. Dans l'hypothèse à laquelle nous faisons

(*) Si, en effet, nous regardons x comme abscisse OP, nous ne pourrons pas suivre la variation de $f(x)$ en mouvant P de bout en bout sur la droite X'X, puisque pour toutes les valeurs irrationnelles de x telle que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., $f(x)$ sera inexistant : il nous faudra faire sauter x par-dessus ces valeurs. — On peut également concevoir des fonctions $y = f(x)$ qui sont, elles, définies pour toutes les valeur de x, mais sont telles que, quand x varie avec *continuité*, y varie d'une manière *discontinue* en sautant par-dessus certaines valeurs.

maintenant allusion, on pousse beaucoup plus loin la fiction et l'initiative. Ici, en effet, on s'attaque à des problèmes où l'une des données principales — la variable indépendante x — est elle-même imaginaire. Dans quel but fait-on donc cette singulière hypothèse? Parce que l'on s'aperçoit que l'on peut ainsi rendre plus apparentes les parentés des fonctions et leurs propriétés caractéristiques. En étudiant les fonctions dans le « champ imaginaire » comme dans le « champ réel », on découvre des faits mathématiques extrêmement importants qui mettent à nu d'une façon inespérée la structure et, si l'on peut ainsi dire, l'anatomie de ces êtres abstraits et mystérieux que nous dénommons des « fonctions ».

Voici par exemple deux fonctions $\frac{1}{x^2-1}$ et $\frac{1}{x^2+1}$ qui, par leurs formules, se ressemblent beaucoup, mais qui, par leurs propriétés, sont à première vue très dissemblables. La première *devient infinie* pour deux valeurs de x ($x=1$ et $x-1$) [en effet pour ces deux valeurs, la différence x^2-1 devient 0; or le rapport $\frac{1}{0}$ est infiniment grand (*).] Au contraire la fonction $\frac{1}{x^2+1}$, dont le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur (réelle) de x, ne devient jamais infinie quand x est réel. Supposons, pourtant, que x puisse prendre des valeurs imaginaires complexes. En ce cas, x prendra notamment les valeurs i et $-i$ (racines carrées de -1, voir n° 47) pour lesquelles

(*) Puisque le rapport $\frac{1}{n}$ devient de plus en plus grand lorsque n devient de plus en plus petit.

$x^2+1=0$; et alors $\frac{1}{x^2+1}$ deviendra *infini*. Donc cette propriété, très caractéristique, que possède la fonction $\frac{1}{x^2-1}$ de devenir infinie pour deux valeurs de x (et deux seulement), la fonction $\frac{1}{x^2+1}$ la possède aussi. Partant de là, et poursuivant l'analyse des propriétés des deux fonctions, on reconnaît — fait qui était masqué lorsque l'on se limitait au « champ réel » — que les deux fonctions appartiennent sans nul doute à la même famille.

88. On apercevra peut-être mieux la portée de la théorie des *fonctions de variables complexes* si l'on a recours à un certain mode de figuration géométrique qui se présente très naturellement à l'esprit. Une quantité complexe c'est, d'après la définition du n° 47, la somme d'une quantité ordinaire et d'une quantité ordinaire multipliée par i. Désignons les deux quantités ordinaires — qui seront ici des variables — par les lettres x et y, et appelons *désormais* z *la quantité (ou variable) complexe elle-même* (*), c'est-à-dire *posons* $z=x+iy$. Nous pouvons considérer que les deux *quantités réelles* x et y définissent un point M (le point qui dans un plan donné a pour abscisse x et pour ordonnée y). Suivant cette manière de voir, à *toute « valeur » de la variable* z *correspondra*

(*) Ainsi la variable indépendante dont dépendent les fonctions que nous étudions, sera dorénavant appelée z et non plus x; et la quantité x qu'au n° 87 nous supposions pouvoir être complexe sera désormais toujours réelle.

une position bien déterminée, et réciproquement à toute position de M *correspondra une et une seule valeur de la quantité complexe* z; nous exprimerons ce fait en disant qu'une quantité complexe z équivaut à un point, ou même — pour parler d'une façon plus concise encore — nous dirons que *z est* un point. Ainsi, par exemple (fig. 48), la quantité $1+2i$ est le point M_1 d'abscisse 1 et d'ordonnée 2; la quantité $2i$ est le point M_2 d'abscisse 2 et d'ordonnée — 1, etc.; les quantités réelles, qui forment un groupe particulier spécial de quantités complexes sont elles-mêmes des points : ce sont les points de l'axe X'X, dit *axe réel.*

FIG. 48

Cela posé, que sera-ce qu'une fonction de la variable z? Ce sera une quantité algébrique dont la valeur variable sera déterminée par la position variable « du point z »; en d'autres termes, ce sera une fonction d'*un point variable dans un plan.* Désignons une telle fonction par $f(z)$. En général, $f(z)$ sera une quantité complexe que l'on pourrait, elle aussi, figurer par un point. Mais nous réserverons ce mode de figuration pour la variable z, et nous définirons $f(z)$ en termes algébriques, comme étant égale à $u+iv$, forme générale des quantités complexes; les quantités u et v seront ici *réelles* et toutes deux des *variables,* fonctions de la position du point z.

Ces diverses conventions étant admises, on peut faire aussitôt deux remarques. La première, c'est que si l'on réussit à faire une étude complète de la fonction $f(z)$, on déterminera par là même les propriétés de la fonction de *variable réelle* $f(x)$ à laquelle $f(z)$ est égale pour $z=x$

(c'est-à-dire pour les valeurs réelles de z, dont l'ordonnée y est nulle). La seconde remarque, c'est qu'en élargissant par les considérations indiquées ci-dessus le champ de la théorie des fonctions, on accroît considérablement la souplesse de cette théorie. Ainsi, par exemple, considérons deux valeurs réelles de z, soit $z=x_1$ et $z=x_2$, représentées par deux points M_1 et M_2 de l'axe X'X. Dans la théorie élémentaire, z ne peut varier d'une manière continue entre ces deux valeurs que d'une seule façon (en parcourant la série des valeurs réelles intermédiaires). Dans la nouvelle théorie, au contraire, le point variable z pourra aller de $z=x_1$ à $z=x_2$ par tous les chemins que l'on peut tracer, dans le plan, entre les deux points M_1 et M_2; et cette circonstance nous fournit de nouveaux points de vue, de nouveaux moyens d'investigation pour l'étude des fonctions $f(z)$. Nous aurons également la faculté d'étudier la façon dont se comporte $f(z)$ pour les points z intérieurs à des « régions » variées du plan, choisies et délimitées comme il nous plaira. Par cet artifice, il nous arrivera de découvrir diverses propriétés extrêmement saisissantes, extrêmement fertiles en conséquences, dont nous ne nous serions autrement jamais avisés. A titre d'exemples je vais indiquer brièvement quelques-uns des faits les plus saillants que l'on a obtenus de cette manière. L'exposé de ces faits nous conduira au seuil de l'un des chapitres les plus nouveaux et les plus suggestifs de l'Analyse mathématique contemporaine.

89. Nous avons défini au n° 50 le *sinus* et le *cosinus* d'une quantité réelle. Nous avons montré plus loin com-

ment les quantités *sin t* et *cos t* peuvent être considérées comme des sommes de *séries convergentes* à une infinite de termes (séries (13) et (12) du n° 54). En nous référant à ces séries, nous pouvons définir d'une manière précise ce qu'il convient d'entendre par *sin z* et *cos z* lors-

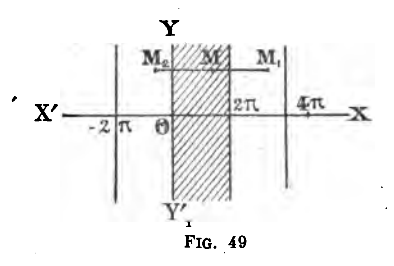


FIG. 49

que *z* est une quantité complexe quelconque : *sin z* et *cos z* seront des fonctions de *z* dont les valeurs seront données (dans les conditions indiquées au n° 54, c'est-à-dire avec une approximation arbitrairement grande) par les égalités (*) :

$$(1) \quad \sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1\times2\times3} + \frac{z^5}{1\times2\times3\times4\times5} - \ldots$$

$$(2) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{1\times2} + \frac{z^4}{1\times2\times3\times4} - \ldots$$

Pour les valeurs particulières de *z* qui sont des quantités réelles, le *sinus* et le *cosinus* ainsi définis coïncident exactement avec le *sinus* et le *cosinus* du n° 50. D'ailleurs

(*) Les seconds membres de ces égalités sont les séries du n° 54 où l'on a remplacé *t* par *z*.

on peut démontrer que les égalités (6) du n° 50, qui caractérisent le *sinus* et le *cosinus* réels, sont vraies aussi lorsque z est complexe, en sorte que l'on a toujours (*), *quel que soit* z,

$$(3) \qquad sin\ (z+2\pi) = sin\ z;\ cos\ (z+2\pi) = cos\ z$$

Marquons alors sur l'axe réel X'X les extrémités des abscisses 2π, 4π, 6π, etc. et -2π, -4π, etc., et par ces extrémités menons les parallèles à l'axe Y'Y. Nous divisons ainsi le plan en une série de *bandes parallèles* toutes identiques à celle que nous couvrons de hachures sur la figure 49. Dans toutes ces bandes les fonctions *sin z* et *cos z* prennent exactement la même série de valeurs. Plus précisément, soit M un point quelconque de la première bande; sur la parallèle à X'X menée par M portons les longueurs MM_1 et MM_2 égales à 2π ou -2π; le *sinus* et le *cosinus* prennent alors aux points M_1 et M_2 *la même valeur qu'au point* M; de même au point M_3, situé à la distance 4π de M, et ainsi de suite. Ainsi, il suffira de connaître les fonctions *sin z* et *cos z* dans *l'une* des bandes parallèles pour les connaître *partout*. Les deux fonctions « se *reproduisent* » quand z passe d'une bande à l'autre, fait que l'on exprime en disant que ces fonctions sont périodiques (**).

90. En se plaçant à un point de vue semblable on peut définir une famille de fonctions plus nouvelles et

(*) Revoir au n° 50 la définition précise du nombre π.

(**) De là résulte en particulier la propriété fondamentale de la « *sinusoïde* » que nous avons énoncée au n° 65.

plus curieuses, qui sont elles aussi dites *périodiques* ou, plus précisément, *bipériodiques.* A chacune d'elles correspond dans le plan de la variable z un réseau de parallélogrammes (fig. 50) tels que la fonction se reproduise (repasse par la même série de valeurs) lorsque l'on passe d'un parallélogramme à un autre. Ainsi il suffit de connaître la fonction dans *un* parallélogramme (tel que le parallélogramme ABCD couvert de hachures sur la figure) pour la connaître *partout.* Plus précisément, soit

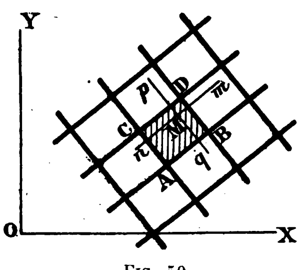


FIG. 50

M un point *quelconque* du parallélogramme haché; de M menons des segments de droite Mm et Mn, Mp et Mq, parallèles et égaux aux côtés AB et AC du parallélogramme et de sens différents : les fonctions $f(x)$ auxquelles nous faisons allusion ont la propriété de *toujours prendre aux points* m, n, p, q *la valeur qu'elles ont au point* M.

Les fonctions bipériodiques ainsi définies ont reçu le nom de « *fonctions elliptiques* ». Il en existe une grande variété, car on peut faire varier *ad libitum* le réseau de parallélogrammes qui détermine la « périodi-

cité » des fonctions, et à chaque réseau correspondent, d'autre part, plusieurs familles de fonctions elliptiques. Indépendamment de leur particularité fondamentale, les fonctions elliptiques possèdent de nombreuses propriétés et elles interviennent dans de nombreux problèmes. Ainsi, on démontre que l'équation différentielle

$$y'^2=ay^3+by^2+cy+d \quad \ldots.$$

où y'^2 désigne le carré de la dérivée de y et où a, b, c. d sont des quantités constantes (indépendantes de x et y), a pour « solutions » des fonctions elliptiques.

91. D'autres fonctions encore ont la propriété de se *reproduire* dans une série de régions de formes régulières dont l'ensemble recouvre le plan de la variable z. Telles sont, par exemple, les *fonctions modulaires*.

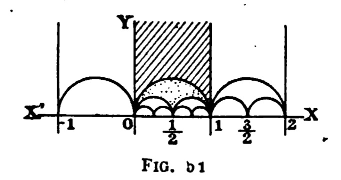


Fig. 51

Marquant sur l'axe X'X les points 1, 2, 3,... et — 1, — 2, divisons le plan en bandes parallèles à OY (comme plus haut au n° 89). Menons ensuite des demi-circonférences ayant pour diamètres les segments de X'X qui vont de $z=0$ à $z=1$, de $z=1$ à $z=2$, etc. Nous obtenons, *au-dessus de ces demi-circonférences*, et *entre les parallèles* à Y'Y, une première série de régions telles

que la région couverte de hachures; dans chacune de ces régions la fonction dite modulaire prend une et une seule fois toute valeur possible, et elle se reproduit lorsque z passe d'une région à l'autre.

Marquons maintenant sur l'axe X'X les points $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc., et $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, etc., et menons les demi-circonférences ayant pour diamètres les segments de X'X qui vont de 0 à $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2}$ à 1, de 1 à $\frac{3}{2}$, etc. Nous obtenons, entre les nouvelles demi-circonférences et les précédentes, une deuxième série de régions limitées chacune par *trois* demi-circonférences (telle que la région couverte de points sur la figure 51) ; la fonction modulaire se reproduit périodiquement lorsque l'on passe de l'une à l'autre de ces régions et, pareillement, lorsque l'on passe d'une région quelconque de la première série à une région quelconque de la seconde série.

Ce n'est pas tout. Entre les demi-circonférences tracées en dernier lieu et l'axe X'X, on peut encore tracer une troisième série de demi-circonférences ayant pour diamètres les segments de l'axe X'X limités aux points 0 et $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, etc. (voir sur la fig. 51 les quatre premières) ; on obtient ainsi une troisième série de régions comprises entre la deuxième et la troisième série de circonférences; et, en appliquant indéfiniment le même procédé, on construira indéfiniment de nouvelles séries de régions. Eh bien, dans *chacune des régions ainsi définies* la fonction modulaire se reproduira elle-même, y prenant une et une seule fois toute valeur possible.

92. Les fonctions modulaires ont été l'objet de nombreux travaux pendant la seconde moitié du XIX[e] siècle. C'est vers 1880 seulement qu'Henri Poincaré s'aperçut qu'elles ne formaient qu'un groupe particulier d'une classe de fonctions beaucoup plus générales qu'il a baptisées *fonctions fuchsiennes;* celles-ci, d'ailleurs, ne sont elles-mêmes qu'une branche d'une famille encore plus étendue, la famille des *fonctions automorphes.*

Une fonction fuchsienne $f(z)$ a la propriété de se *reproduire elle-même* dans une série de régions qui recouvrent le plan de la variable z (ou au moins une partie de ce plan) et dont chacune est limitée par certains *arcs de* cercle construits (et placés les uns par rapport aux autres) suivant des lois régulières. Une telle région est appelée *polygone curviligne* (*). Algébriquement, la propriété fondamentale des fonctions fuchsiennes se traduit comme il suit : On se donnera un certain nombre de fractions de la forme $\frac{az+b}{cz+d}$ (où a, b, c, d sont des quantités constantes), soit par exemple *trois* fractions (convenablement choisies) :

$$\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \qquad \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} \qquad \frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}$$

A ces fractions correspondent des fonctions fuchsiennes $f(z)$ telles que, *si l'on désigne par* t *une quantité complexe quelconque,* la fonction $f(z)$ prend la *même valeur*

(*) Ainsi la région couverte de points sur la fig 51 est un polygone à trois côtés ou triangle curviligne; les polygones curvilignes relatifs aux fonctions fuchsiennes ont en général plus de trois côtés.

pour $z=t$ et pour $z=\dfrac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}$ ainsi que pour $z=\dfrac{a_2t+b_2}{c_2t+d_2}$ et $z=\dfrac{a_3t+b_3}{c_3t+d_3}$. Ainsi est exprimée quantitativement la loi d'après laquelle se correspondent les points corrélatifs des régions où la fonction se reproduit périodiquement.

Les fonctions modulaires sont, comme je l'ai dit, des cas particuliers de fonctions fuchsiennes. De même les fonctions elliptiques (*). Un grand nombre d'autres fonctions fuchsiennes et automorphes interviennent dans divers problèmes essentiels de l'Analyse moderne.

93. Il n'y a pas quarante ans qu'en promenant leurs regards sur l'univers mathématique, les savants y ont découvert les fonctions fuchsiennes et automorphes. Et pourtant la structure de ces fonctions n'est-elle point d'une régularité et d'une beauté qui auraient ravi jadis les géomètres grecs? Pour les conquérir, ceux-ci n'eussent-ils pas été prêts à déployer tous leurs talents, à mettre en œuvre toutes leurs ressources, s'ils avaient su de quel côté il fallait chercher. Ce trésor, cependant, leur fut refusé. Les Grecs, en effet, ne possédaient point les moyens d'investigation dont nous disposons aujourd'hui. Ils n'avaient pas comme nous su faire de l'algèbre une machine à grand rendement. Ils manquaient de la hardiesse nécessaire pour introduire dans la science des notions fictives comme celle

(*) On voit aussitôt que si l'on ne conserve que les deux premières fractions ci-dessus et si, de plus, on suppose que a_1, a_2, d_1 et d_2 sont nuls, et que c_1 et c_2 ont pour valeur 1, la fonction fuchsienne devient une fonction bi-périodique au sens du n° 90. — Les longueurs OA et OB du n° 90 auront alors pour valeurs b_1 et b_2.

de nombres imaginaires. D'autre part ils avaient de l'objet des mathématiques une conception noble mais étroite. Encore trop esclaves de leurs sens, et trop attachés aux arts plastiques et à la musique, ils recherchaient trop exclusivement la beauté des formes géométriques et l'harmonie des rapports numériques. Aux savants de notre époque était réservé de reconnaître qu'en étudiant pour elles-mêmes, dans l'abstrait, et en dehors de toute figuration matérielle, les propriétés des choses mathématiques, on peut découvrir des vertus, des coïncidences, des lois, aussi admirables que celles dont se délectaient les Grecs, et, par surcroît, plus générales. Les vérités mathématiques dont nous obtenons ainsi la révélation, personne ne les avait encore aperçues depuis que la terre existe. Et, pourtant, elles sont de tous les temps, et désormais elles procureront des satisfactions intellectuelles à des milliers de générations. Est-il besoin de chercher d'autres raisons pour nous convaincre qu'elles sont précieuses?

TABLE